

2 **SUDUT ANTARA DUA GAMBAR BERUKURAN SAMA**3 AGAH D. GARNADI¹4 ¹Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Pertanian Bogor, Indonesia, e-mail:
5 agah.garnadi@gmail.com6
7 *Teruntuk Prof. Dr. Siswadi, MSc., yang memasuki usia ke 71 tahun.*8 **Abstrak**9 Gambar yang terdiri dari (m, n) pixel dapat dipandang sebagai sebuah matriks yang berukuran $m \times n$. Dengan memanfaatkan formula sudut antara dua subruang, didapatkan sepasang sudut antara dua matriks, memanfaatkan ruang kolom dan ruang baris dari kedua matriks. Sementara nilai-singular dari masing2 matriks, digunakan untuk menghitung jarak. Dengan demikian, diperoleh representasi jarak, dan sepasang sudut antara 2 matriks yang berukuran sama.10 *Kata Kunci:* Gambar, Dokumen, Text Mining, matriks, sudut, subruang, aplikasi aljabar linear

11 1. PENDAHULUAN

12 Dalam text-mining, semisal dalam search engine, konsep dasar Aljabar Linear yaitu sudut, sering digunakan untuk mengukur seberapa dekat vektor pencari relatif terhadap corpus [1, 2]. Berdasarkan konsep dasar aljabar linear tersebut, dengan menggunakan representasi vektor dari Matriks digunakan untuk menghitung sudut antara dua Matriks, sehingga pengertian sudut antara dua vektor yang biasa dapat digunakan, yaitu dengan cara menghitung besarnya sudut yang dibentuk oleh dua vektor menjadi satu cara untuk menghitung sudut dari dua buah Matriks. Dengan memanfaatkan formula sudut antara dua subruang, didapatkan pula sepasang sudut antara dua matriks, memanfaatkan ruang kolom dan ruang baris dari kedua matriks.

13 $A, B \in R^{m,n}$: Gambar yang tersusun atas $m \times n$ pixel, sebagai matriks.

14 2. SUDUT ANTARA DUA GAMBAR

15 **2.1. Rumus Sudut Antara Dua Subruang ([4],[5],315).** Misalkan $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ adalah ruang hasil kali dalam berdimensi 2 atau lebih, $U = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ dan $V = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ adalah 2 subruang di X dimana $1 \leq p \leq q < \infty$. Misalkan pula bahwa $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ dan $\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ adalah ortonormal, maka θ adalah sudut antara subruang U dan V , yang diberikan sebagai berikut.

16
$$\cos^2(\theta) = \det(MM^T) \quad (1)$$

17 dengan $M := [\langle u_i, v_k \rangle] = [u_i^T * v_k]$ adalah matriks berukuran $p \times q$, dan $M^T = [v_k^T * u_i]$.
18 Perhatikan bahwa, untuk kasus $p = q$, rumus sudut menjadi:

19
$$\cos(\theta) = |\det(M)| \quad (2)$$

20

2000 Mathematics Subject Classification:

21 Received: dd-mm-yyyy, accepted: dd-mm-yyyy.

2.2. Singular Value Decomposition (Dekomposisi Nilai Singular)[6] :

$$A = U_A D_B V_A^T, U_A \in R^{m,p}, D_A \in R^{p,p}, V_A^T \in R^{p,n},$$

29

$$B = U_B D_B V_B^T, U_B \in R^{m,q}, D_B \in R^{q,q}, V_B^T \in R^{q,n}$$

30 dengan U_A, U_B, V_A, V_B merupakan matriks ortonormal, serta D_A dan D_B keduanya matriks
31 diagonal.

32 U_A, U_B secara berturut-turut merupakan basis ruang kolom dari A dan B . Demikian pula dengan
33 V_A, V_B secara berturut-turut merupakan basis ruang baris dari A dan B .

34 2.3. Sudut Antara Dua Subruang Kolom. Tuliskan:

$$U_{UA} := U_A, V_{UB} = U_B.$$

35 Misalkan $U_{UA} = [u_1 u_2 \cdots u_p]$ dan $V_{UB} = [v_1 v_2 \cdots v_q]$. Sudut antara A dan B dapat
36 dihitung :

$$M = [U_{UA}^T V_{UB}]$$

37

$$\cos^2(\theta) = \det(M * M^T)$$

38 2.4. Sudut Antara Dua Subruang Baris. Ambil:

$$U_{VA} := V_A, V_{VB} = V_B.$$

39 Misalkan $U_{VA} = [u_1 u_2 \cdots u_p]$ dan $V_{VB} = [v_1 v_2 \cdots v_q]$. Sudut antara U_{VA} dan V_{VB} dapat
40 dihitung :

$$M = [U_{VA}^T V_{VB}]$$

41

$$\cos^2(\phi) = \det(M * M^T)$$

42 • Sudut θ, ϕ , secara berturut-turut disebut *sudut kiri (kolom)* dan *sudut kanan (baris)*
43 *antara dua matriks. Selanjutnya, pasang (θ, ϕ) , disebut pasang sudut antara*
44 *dua matriks.*

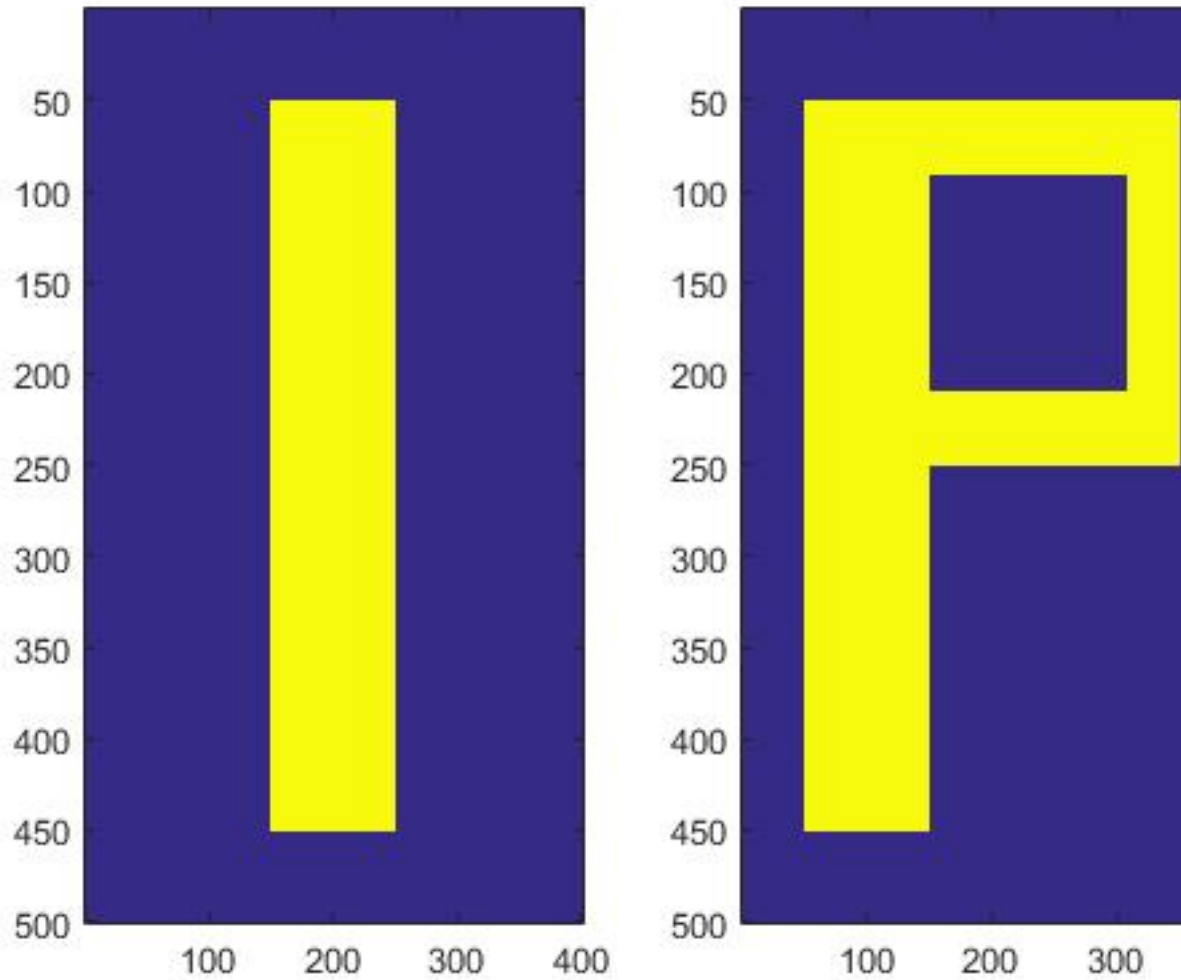
45 • Dari faktorisasi SVD matriks A dan B , diperoleh nilai-singularnya secara berturut-turut
46 $d_A = \text{diag}(D_A)$ dan $d_B = \text{diag}(D_B)$. Sehingga dapat dihitung jarak antara kedua
47 matriks, yaitu : $\rho(A, B) = \|d_A - d_B\|$, dengan $\|\cdot\|$ merupakan jarak Euklidean dari
48 sebuah vektor.

49

3. CONTOH

50 **Contoh 1.** Contoh matriks yang merupakan representasi dari gambar hitam-putih.

51 Theta = 1.1921e-07



52

53 $\Phi = 0.66133$

54 Pada lampiran, terlampir script Octave, untuk menghitung pasang sudut (Θ, Φ) antara
55 dua gambar.

56 **Contoh 2.** Pada contoh berikut digunakan sebuah gambar berwarna. Gambar berwarna ter-
57 diri atas dari 3 lapisan, secara berturutan yaitu lapisan Red, Green, dan Blue. Diukur sudut
58 antara pasang-demi-pasang lapisan dari gambar berwarna dari foto IPB.



59

SudutAntaraDuaGambarRGBrektoratIPB

60 Green vs Red

61 Theta = 0.0000 + 0.0000i ; Phi = 1.5708 + 0.0000i

62 Green vs Blue

63 Theta = 0.0000 + 0.0000i ; Phi = 1.5708 + 0.0000i

64 Red vs Blue

65 Theta = 0.0000 + 0.0000i ; Phi = 1.5708 + 0.0000i

66

67

68 4. SIMPULAN

69 Diperlihatkan cara menghitung pasang sudut antara dua gambar berukuran sama, dengan
70 memanfaatkan rumus sudut antara dua subruang. Secara bersama-sama, diperoleh juga jarak
71 antara dua gambar berukuran sama.

72 Sudut similaritas (atau Kosinus Similaritas) digunakan sebagai cara mengukur similaritas
73 dua vektor informasi. Maka, pasang sudut (Θ, ϕ) di atas, menjadi sudut ganda similaritas
74 (Kosinus ganda similaritas, bi-cosine similarity) dari dua gambar.

75

UCAPAN TERIMA KASIH

76 Terima kasih kepada saudari Grace Agustina, yang telah memulai perhitungan SVD.

77

DAFTAR PUSTAKA

- 78 [1] Antonellis, I., Gallopoulos, E., *Exploring Term-Document Matrices from Matrix Models in Text Mining*.
79 Greece: University of Patras, 2006
- 80 [2] Berry, M.W., Browne, M., *Understanding Search Engines: Mathematical Modelling and Text Retrieval*.
81 Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992
- 82 [3] Garnadi, A.D., 2019, Jarak dan Sudut antara Dua Matriks yang Berdimensi Sama, *Jurnal Matematika*
83 *Integratif*, V15 No 1, pp??-?? akan terbit
- 84 [4] Gunawan, H., Neswan, O., On Angles Between Subspaces Of Inner Product Spaces. Vol. 11, No. 2. *In-*
85 *donesia: Math. Society (MIHMI)*, 2005
- 86 [5] Gunawan, H., Neswan, O., Setya-Budhi W. A Formula for Angles Between Two Subspaces of Inner Product
87 Spaces, *Beitrge Algebra Geom.* Vol. 46(2), 311-320, 2005
- 88 [6] Leon, S.J., *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Edisi ke-5. A. Bondan, Penerjemah; Erlangga. Terjemahan dari
89 *Linear Algebra with Applications*, 1998

- 90 [7] Rosliyanti, P.P., Alban, M., Agustian, R., Penerapan Konsep Dasar Aljabar Linear Untuk Menduga Ter-
 91 jadinya Plagiarisme. Makalah PKML. Dir.Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat, Depdiknas. Bo-
 92 gor: IPB, 2006
- 93 [8] Lestari, P.D. R., Agustian, R, Gafriadi,R., Febriyanti,A., dan Garnadi, A.D., Model Vektor dan Matriks
 94 dari Dokumen Serta Sudut antara Dua Vektor dan Dua Subruang untuk Menduga Dini Plagiarisme Doku-
 95 men, Manuskrip, <https://dx.doi.org/10.31227/osf.io/hmntg>

96 5. LAMPIRAN

97 **Contoh 1.**

```

98 %
99 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
100 %
101 % Sudut antara 2 gambar berukuran sama
102 % Agah D. Garnadi
103 %
104 %
105 % Contoh 1:
106 % Gambar huruf I dan P
107 %
108 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
109 %
110 %
111 % Huruf I
112 %
113 hurufI=zeros(500,400);
114 hurufI(50:450,150:250)=200;
115 %
116
117 %Huruf P
118 %
119 hurufP=zeros(500,400);
120 hurufP(50:450,50:150)=200;
121 hurufP(50:90,150:350)=200;
122 hurufP(210:250,150:350)=200;
123 hurufP(90:210,310:350)=200;
124 %
125     [UI,SI,VI] = svd(hurufI,'econ') ;
126     [UP,SP,VP] = svd(hurufP,'econ') ;
127 %
128 % resize(SI) ;
129 k = rank(SI)
130 SI = SI(1:k,1:k);
131 UI = UI(:,1:k) ;
132 VI = VI(:,1:k) ;
133 %
134 % resize(SP) ;
135 k = rank(SP)
136 SP = SP(1:k,1:k);
137 UP = UP(:,1:k) ;
138 VP = VP(:,1:k) ;
139 % Hitung matriks M untuk sudut antar subruang kiri
140 M = UI'*UP ;
141 %p \neq q

```

```

142 size(M)
143 %
144 Cos2Theta = det(M*M')
145 Theta = acos(sqrt(Cos2Theta))
146 %
147 %
148 % Hitung matriks M untuk sudut antar subruang kanan
149 M = VI'*VP ;
150 %
151 size(M)
152 %
153 Cos2Phi = det(M*M')
154 Phi = acos(sqrt(Cos2Phi))
155 %
156 rho = norm(SI - SP)
157 % % Auxilliary
158 [n1 n2] = size(hurufI);
159 [X,Y] = meshgrid(1:n2,1:n1) ;
160 surf(X,Y,hurufI) ;
161 %
162 surf(X,Y,hurufP) ;

```

163 Contoh 2.

```

164 %
165 % %%%%%%%%%%%
166 %
167 % Sudut antara 2 gambar berukuran sama
168 % Agah D. Garnadi
169 %
170 %
171 % Contoh 2:
172 % Sudut antar komponen warna
173 %
174 % %%%%%%%%%%%
175 Gambar = imread('RektoratIPB.jpg');
176 GambarRektorat = im2double(Gambar);
177 GambarBlue = GambarRektorat(:,:,3) ;
178 GambarGreen = GambarRektorat(:,:,2) ;
179 GambarRed = GambarRektorat(:,:,1) ;
180 [URed, SRed, VRed] = svd(GambarRed);
181 [UGreen, SGreen, VGreen] = svd(GambarGreen);
182 [UBlue, SBlue, VBlue] = svd(GambarBlue);
183 k = rank(SRed) ;
184 SRed = SRed(1:k,1:k) ;
185 URed = URed(:,1:k) ;
186 VRed = VRed(:,1:k) ;
187 k = rank(SGreen);
188 SGreen = SGreen(1:k,1:k) ;
189 UGreen = UGreen(:,1:k) ;
190 VGreen = VGreen(:,1:k) ;
191 k = rank(SBlue);
192 SBlue = SBlue(1:k,1:k) ;
193 UBlue = UBlue(:,1:k) ;

```

```

194 VBlue = VBlue(:,1:k) ;
195 %
196 %%%% Sudut Ganda antara Komponen Green dengan Komponen Red %%%%
197 %
198 % Hitung Matriks M untuk sudut kiri
199 %
200 M = UGreen'*URed ;
201 Cos2Theta = det(M*M) ;
202 Theta = acos(sqrt(Cos2Theta));
203 %[Cos2Theta Theta]
204 %
205 % Hitung Matriks M untuk sudut kanan
206 %
207 M = VGreen'*VRed ;
208 Cos2Phi = det(M*M) ;
209 Phi = acos(sqrt(Cos2Phi));
210 %[Cos2Phi Phi]
211 [Theta Phi]
212 %
213 %%%% Sudut Ganda antara Komponen Green dengan Komponen Blue %%%%
214 %
215 % Hitung Matriks M untuk sudut kiri
216 %
217 M = UGreen'*UBlue ;
218 Cos2Theta = det(M*M) ;
219 Theta = acos(sqrt(Cos2Theta));
220 %[Cos2Theta Theta]
221 %
222 % Hitung Matriks M untuk sudut kanan
223 %
224 M = VGreen'*VBlue ;
225 Cos2Phi = det(M*M) ;
226 Phi = acos(sqrt(Cos2Phi));
227 %[Cos2Phi Phi]
228 [Theta Phi]
229 %%%% Sudut Ganda antara Komponen Red dengan Komponen Blue %%%%
230 %
231 % Hitung Matriks M untuk sudut kiri
232 %
233 M = URed'*UBlue ;
234 Cos2Theta = det(M*M) ;
235 Theta = acos(sqrt(Cos2Theta));
236 %[Cos2Theta Theta]
237 %
238 % Hitung Matriks M untuk sudut kanan
239 %
240 M = VRed'*VBlue ;
241 Cos2Phi = det(M*M) ;
242 Phi = acos(sqrt(Cos2Phi));
243 %[Cos2Phi Phi]
244 [Theta Phi]
245

```