

Solusi Alam Semesta *Rotating Dust* (1+1)-dimensi tanpa Konstanta Kosmologi

Rigel Raimarda

Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, IPB University,
Jl. Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor 16680

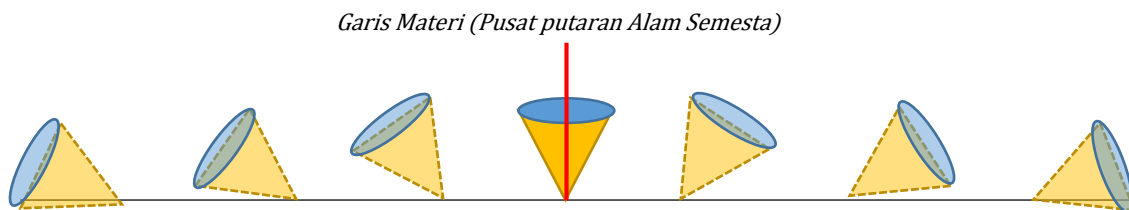
ABSTRAK

Telah dibuktikan bahwa persamaan medan Einstein *Rotating Dust* (putaran debu) tanpa konstanta kosmologi memenuhi solusi ruang-waktu serupa dengan Gödel. Solusi (1+1)-dimensi memberikan rapat energi samadengan dengan nol. Solusi putaran debu tanpa konstanta kosmologi akan memberikan persamaan eksponensial pada komponen off-diagonal dan komponen ruang dx^2 .

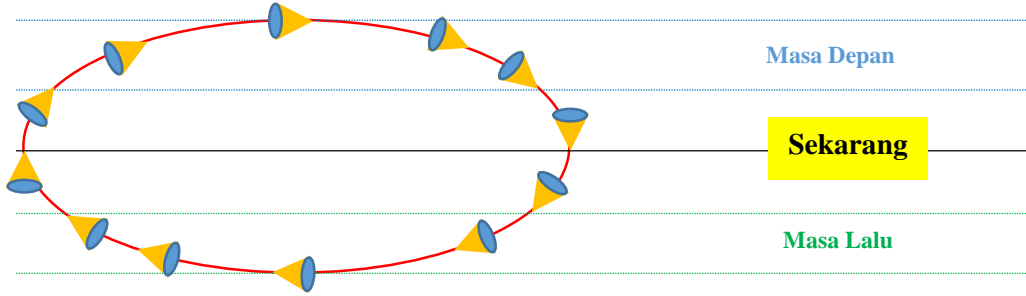
1. Pendahuluan

Sebelumnya, [1] telah menyelesaikan persamaan medan Einstein dengan solusi fluida sempurna yang pula merupakan solusi dari model Alam Semesta Gödel. [2] menjelaskan tentang solusi lain dengan tensor momentum energi debu berputar dengan konstanta kosmologi. Model Alam Semesta Gödel memberikan gambaran tentang alam semesta berputar homogen, dengan konstanta kosmologi tak-nol [3].

Solusi Model Alam Semesta Gödel memberikan lintasan time-like tertutup yang memiliki berbagai kesukaran saat diformulasikan untuk konsisten dengan hukum termodinamika [4]. Struktur *tilting* dari *light-cone* yang menjauhi pusat putaran alam semesta dari *hypersurface* nya memberikan kemungkinan adanya lintasan *time-like* tertutup. Alam semesta gödel memberikan konsekuensi pada terlanggarnya hukum kausalitas yaitu perjalanan waktu mundur.



Gambar 1. Ilustrasi *tilting light-cone* dari model alam semesta Godel



Gambar 2. Ilustrasi lintasan lengkung *time-like* tertutup dalam model alam semesta Gödel

Suatu Metrik ruang-waktu yang mempunyai elemen eksponensial pada suku *off-diagonal* memiliki solusi lintasan *time-like* tertutup dan konstanta kosmologi negatif [5]. Pada umumnya, solusi Gödel dimodelkan dalam (3+1)-dimensi. Solusi *toy-model* lain dari Gödel dapat dimodelkan dalam (2+1)-dimensi [6]. Dalam Solusi Gödel putaran debu (1+1)-dimensi kemungkinan besar akan menghasilkan tiga persamaan. Bahwasanya pada solusi medan dimana pada tensor Ricci hanya terdapat R_{00}, R_{11}, R_{01} dimana $R_{01} = R_{10}$.

2. Pembahasan

Tensor momentum energi pada solusi putaran debu dan persamaan medan Einstein diberikan sebagai berikut :

$$T_{\mu\nu} = \rho u_{\mu} u_{\nu} \quad (1)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \chi T_{\mu\nu} \quad (2)$$

Dengan χ adalah $\frac{8\pi G}{c^4}$, $u_{\mu} u_{\nu}$ = vektor kecepatan-4 dan ρ = densitas energi.

Metrik Gödel mengikuti pola pada [7] mempunyai bentuk dengan permisalan fungsi $\mathbf{A}(x_1)$ dan $\mathbf{B}(x_1)$ pada masing masing elemen ruang diagonal dan off-diagonal. Metrik Gödel juga dapat disederhanakan seperti berikut :

$$ds^2 = dx_0^2 + A(x_1) dx_1^2 + 2B(x_1) dx_1 dt \quad (3)$$

$$ds^2 = (dx_0 + B(x_1) dx_1)^2 + (A(x_1) - B^2(x_1)) dx_1^2 \quad (4)$$

Dalam menelusuri solusi, χ dibuat menjadi $\chi = 1$ dengan tujuan kemudahan dalam mencari pola solusi, karena tujuan utama dalam pencarian solusi adalah untuk menemukan elemen eksponensial.

Didapatkan 2 solusi yang mana merupakan penyelesaian dari persamaan medan einstein diberikan $R_{00} = R_{01} = R_{10} = 0$ dan $T_{00} = \rho$ sehingga :

$$\rho = 0 \quad (5)$$

$$\left(\frac{B_{x_1 x_1}}{B} - \frac{B_{x_1}^2}{B^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{A_{x_1 x_1}}{A} + \frac{A_{x_1}^2}{A^2} \right) = 0 \quad (6)$$

Persamaan (5) dapat diartikan bahwa solusi tidak memiliki rapat energi, artinya dalam solusi (1+1)-dimensi, tak ada energi yang disimpan persatuan volume. Pada persamaan (6) subskrip x_1 menandakan turunan parsialnya, persamaan ini memberikan solusi umum sebagai berikut :

$$A(x_1) = e^{2x_1} \quad (7)$$

$$B(x_1) = e^{x_1} \quad (8)$$

Sehingga dengan mensubstitusi solusi umum (7) dan (8) pada persamaan (3), akan memberikan solusi yang cocok dengan [7] namun tanpa 2 dimensi ruang lainnya.

$$ds^2 = dx_0^2 + e^{2x_1} dx_1^2 + 2e^{x_1} x_0 dx_1 \quad (9)$$

3. Kesimpulan

Solusi serupa Gödel dapat diselesaikan dengan persamaan medan einstein *rotating dust* tanpa konstanta kosmologi. Solusi memberikan karakteristik alam semesta vakum pada model Gödel (1+1)-dimensi. Hal ini berlainan pada solusi original Gödel dimana solusi memiliki densitas energi sehingga solusi yang dihasilkan, kemungkinan besar hanya isometrik (memiliki metrik dengan bentuk yang sama). Diperlukan studi lebih lanjut tentang penelusuran solusi dengan konstanta kosmologi negatif dan rotasi homogen dalam solusi Gödel (1+1)-dimensi lainnya.

Lampiran

Hasil Perhitungan

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & B(x) \\ B(x) & A(x)/2 \end{pmatrix}; g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 2B^{-1}(x) \\ 2B^{-1}(x) & -2A^{-1}(x) \end{pmatrix} \quad (\text{a})$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_{\mu\nu}^1 + \Gamma_{\mu\nu}^1 - \Gamma_{\rho\sigma}^1 \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} \quad (\text{b})$$

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = 0; \quad (\text{c})$$

$$\Gamma_{00}^1 = \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = 0$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} \frac{A_{x_1}}{B} - B_{x_1}; \Gamma_{11}^1 = 2 \frac{B_{x_1}}{B} - \frac{1}{2} \frac{A_{x_1}}{A} \quad (\text{d})$$

$$R_{00} = R_{01} = R_{10} = 0 \quad (\text{f})$$

$$R_{11} = 2 \left(\frac{B_{x_1 x_1}}{B} - \left(\frac{B_{x_1}}{B} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{A_{x_1 x_1}}{A} - \left(\frac{A_{x_1}}{A} \right)^2 \right) \quad (\text{g})$$

$$R = -\frac{2}{A} R_{11} \quad (\text{h})$$

$$\frac{1}{2} g_{11} R = -\frac{1}{2} \left(2 \left(\frac{B_{x_1 x_1}}{B} - \left(\frac{B_{x_1}}{B} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{A_{x_1 x_1}}{A} - \left(\frac{A_{x_1}}{A} \right)^2 \right) \right) \quad (\text{i})$$

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{j})$$

REFERENCES

- [1] Bampi F dan Zordan C. 1978. A note on gödel's metric. *General Relativity and Gravitation*. 9(5):393-398.
- [2] Lindsay D S. 2015. Closed timelike loops in homogeneous rotating Λ -dust cosmologies. *General Relativity and Gravitation*. 47(83). <https://doi.org/10.1007/s10714-015-1919-z>
- [3] Barrow J D dan Tsagas Christos G. 2004. Dynamics and stability of the Gödel Universe. *Classical and Quantum Gravity*. 21(7):1773-1789. <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/21/7/005>
- [4] Klemm D dan Vanzo L. 2005. On the thermodynamics of gödel black holes. *Fortschritte der Physik (Progress of Physics)*. 53(7):919-925. <https://doi.org/10.1002/prop.200410241>
- [5] Gleiser R J, Gürses M, Karasu A dan Sarioglu O. 2006. Closed timelike curves and geodesics of gödel-type metrics. *Classical and Quantum Gravity*. 23(7):2653-2663. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/23/7/025>
- [6] Gürses M, Karasu A dan Sarioglu Ö. 2005. Gödel-type metrics in various dimensions. *Classical and Quantum Gravity*. 22(9):1527-1543. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/9/003>
- [7] Gödel K. 1949. An example of a new type of cosmological solutions of einstein's field equations of gravitation. *Reviews of Modern Physics*. 21(3):447-450.