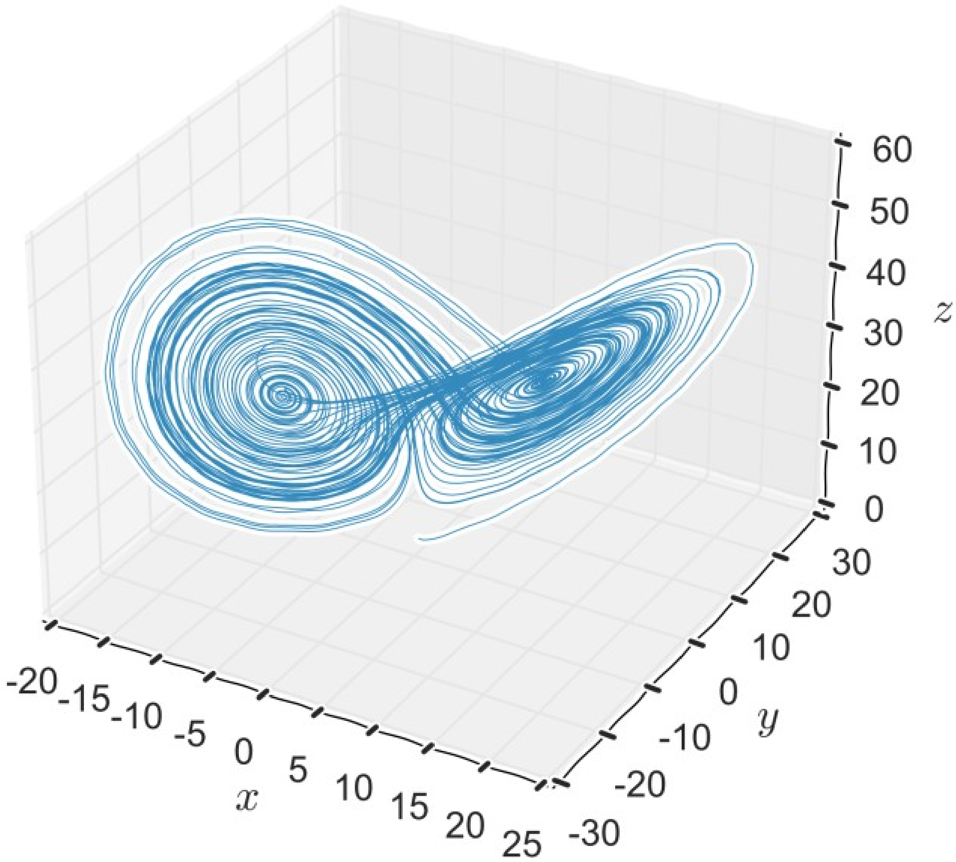
Seri Komputasi



Pengantar Metode Numerik Terapan

Menggunakan Python

Sandy H. S. Herho
Muhammad R. Syahputra
Nurjanna J. Trilaksono

Pengantar Metode Numerik Terapan Menggunakan Python

Sandy Hardian Susanto Herho[1]
Muhammad Ridho Syahputra
Nurjanna Joko Trilaksono

23 Desember 2023

[1] sandy.herho@email.ucr.edu

Seluruh kode pada buku ini dapat diunduh dari situs berikut ini: https://github.com/sandyherho/buku_metnum_Python

Daftar Isi

1

Python: Selayang Pandang

Python adalah bahasa pemrograman serbaguna tingkat tinggi yang telah mendapatkan pengakuan dan adopsi luas, terutama dalam konteks komputasi ilmiah. Dikenal dengan kesederhanaan sintaksisnya, kemudahan dibaca, dan fleksibilitasnya, Python kini menjadi pilihan utama bagi ilmuwan, peneliti, dan insinyur di berbagai disiplin.

Dalam ranah komputasi ilmiah, daya tarik Python terletak pada kemampuan sintaksisnya yang mudah dipahami. Hal ini memudahkan baik pemula maupun pemrogram berpengalaman dalam menulis dan memahami kode. Kejelasan sintaksis ini memiliki nilai signifikan, terutama dalam lingkungan penelitian di mana kolaborasi dan komunikasi yang efektif sangat diperlukan.

Salah satu keunggulan utama Python untuk komputasi ilmiah adalah ekosistemnya yang kaya akan pusaka dan kerangka kerja yang dirancang khusus untuk aplikasi numerik dan ilmiah. NumPy, sebagai contoh, menyediakan dukungan untuk larik dan matriks berdimensi besar beserta fungsi matematis untuk beroperasi secara efisien pada struktur data ini. Inilah dasar bagi operasi numerik yang menjadi inti dari komputasi ilmiah.

SciPy, sebagai kelanjutan dari NumPy, memperluas kemampuannya dengan menyediakan fungsionalitas tambahan untuk optimisasi, pemrosesan sinyal, integrasi, interpolasi, dan berbagai algoritma numerik lainnya. Kedua perpustakaan ini secara bersama-sama memberdayakan ilmuwan untuk menjalankan berbagai komputasi ilmiah tanpa harus merancang ulang algoritma secara menyeluruh.

Matplotlib, sebagai pustaka visualisasi yang dikenal luas, meningkatkan utilitas Python dalam komputasi ilmiah dengan menyederhanakan pembuatan visualisasi statis, animasi, dan interaktif. Kemampuan untuk memvisualisasikan data dengan jelas dan efektif sangat penting dalam konteks penelitian ilmiah.

Pandas, salah satu pustaka lainnya yang sangat berharga, membawa kemampuan manipulasi data ke tingkat berikutnya dengan menyediakan struktur data seperti DataFrame. Struktur data ini sangat memudahkan tugas-tugas seperti pembersihan, penyaringan, dan agregasi data terstruktur, yang menjadi langkah penting dalam persiapan data untuk analisis numerik.

Keunggulan Python juga terletak pada adaptabilitasnya di berbagai domain ilmiah, dari fisika hingga biologi, ekonomi, dan rekayasa. Sifat kolaboratif dan sumber terbuka Python menciptakan komunitas yang mendukung, memfasilitasi berbagi alat, sumber daya, dan praktik terbaik di antara para peneliti.

Tidak hanya itu, kompatibilitas Python dengan bahasa pemrograman lain seperti C dan Fortran memungkinkan integrasi mudah dengan kode yang sudah ada. Hal ini memungkinkan ilmuwan untuk memanfaatkan algoritma dan rutinitas yang telah terbukti optimal tanpa kesulitan.

Secara keseluruhan, kejelasan sintaksis, kemudahan dibaca, dukungan pustaka yang luas, dan ekosistem kolaboratif menjadikan Python tidak hanya sebagai bahasa pemrograman, melainkan sebagai platform yang memberdayakan ilmuwan untuk mengeksplorasi, menganalisis, dan berkomunikasi temuan mereka secara efisien dan efektif dalam ranah komputasi ilmiah.

Meskipun terdapat berbagai macam pustaka Python yang berguna untuk komputasi numerik, buku ini hanya berfokus pada penggunaan tiga pustaka utama, yakni NumPy, Matplotlib, dan SciPy. Hal ini dilakukan untuk menghindari kompleksitas penggunaan berbagai pustaka (yang dapat dipelajari sendiri oleh pembaca dengan membaca dokumentasi masing - masing pustaka tersebut) dan berfokus pada pemahaman inti dari algoritma - algorima numerik-nya.

Untuk dapat menjalankan kode - kode pada buku ini, pembaca disarankan untuk melakukan instalasi Python 3 dari distribusi Anaconda[1]. Seluruh pustaka yang digunakan di buku ini sudah tersedia pada instalasi standar Anaconda. Namun, jika pembaca ingin merepotkan diri sendiri, dapat juga melakukan instalasi Python 3 standar[2], untuk kemudian menjalankan perintah sebagai berikut ini pada *command line* kalian:

```
pip install numpy matplotlib scipy
```

Kita hanya akan menggunakan Python yang berbasis *command line* pada buku ini tanpa Jupyter Notebook, agar membiasakan pembaca pada tradisi komputasi numerik untuk memudahkan familiaritas terhadap terminal, sehingga nantinya akan mudah untuk berpindah ke bahasa pemrograman lainnya, seperi Fortran, C, C++, bahkan Julia yang mungkin harus dipelajari

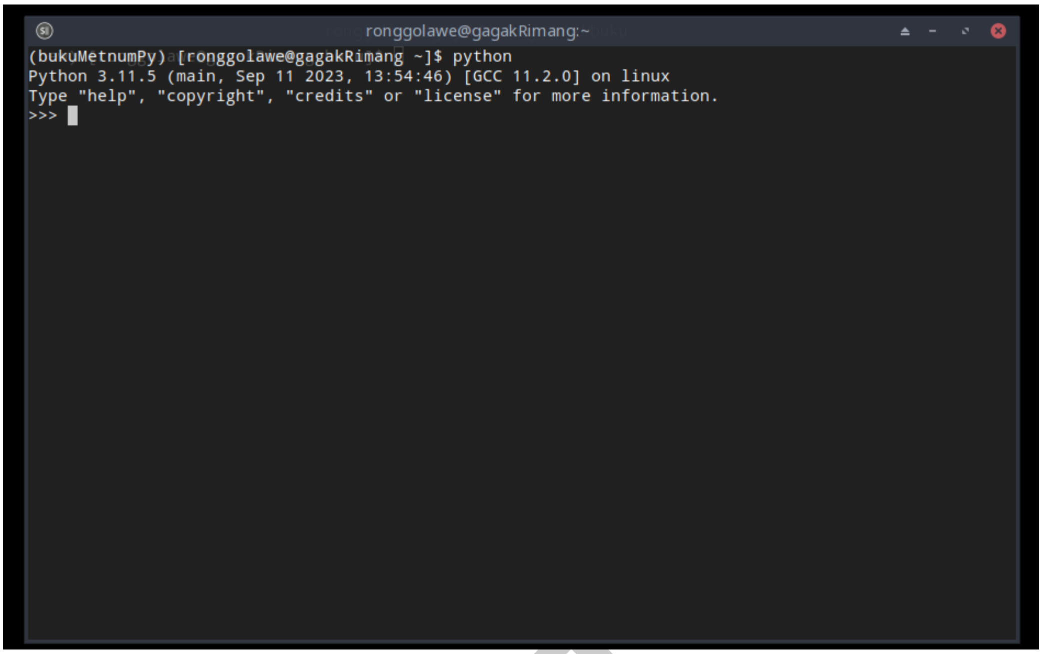
[1] https://www.anaconda.com/download
[2] https://www.python.org/downloads/

pembaca pada suatu titik di masa depan jika hendak menghabiskan karir di bidang ini. Untuk itu, kita menyarankan kalian untuk melakukan instalasi editor teks standar untuk pemrograman, seperti vim[3], GNU Emacs[4], Notepad++[5], Sublime Text[6], Atom[7], dan/atau masih banyak lagi (kalian dapat memilih salah satu dari editor ini, atau kalau kalian mau ditertawakan oleh penyusun, bisa juga menggunakan MS Word untuk ini). Untuk masalah sistem operasi sendiri, kalian bebas menggunakan apapun, tapi saran kami (alangkah lebih baik) membiasakan diri dengan penggunaan sistem operasi yang berbasiskan *Unix-like*, seperti BSD, GNU/Linux, atau MacOS yang mempunyai Terminal bawaan, tapi jika kalian ingin menggunakan MS Windows hal tersebut dapat dimaklumi dan kalian dapat menjalankan kode dan Python Shell dari PowerShell di Windows. Jika selesai dengan *tetek bengek* proses instalasi-nya, maka kita dapat langsung membahas konsep - konsep *scripting* (bukan pemrograman!!!) Python dasar yang dibutuhkan untuk mempelajari buku ini. Namun, jika pembaca tidak mempunyai latar belakang sama sekali tentang pemrograman disarankan untuk mengikuti tutorial Python terlebih dahulu yang banyak tersedia di internet[8].

Variabel

Untuk mengikuti pengenalan tentang variabel ini, coba kalian ketikkan di Terminal atau PowerShell kalian kata `python`, maka kalian akan mendapatkan tampilan Python Shell yang ditunjukkan pada Gambar 1.1 berikut ini.

[3] https://www.vim.org/download.php
[4] https://www.gnu.org/software/emacs/download.html
[5] https://notepad-plus-plus.org/downloads/
[6] https://www.sublimetext.com/download
[7] https://atom.en.softonic.com/
[8] Salah satu tutorial yang sesuai untuk pengantar Python guna mempelajari buku ini terdapat pada kanal youtube John Phillip Jones: https://youtube.com/playlist?list=PL6lxxT7IdTxGp9DoZiQNFo3BXZpmJ8tVf&si=5GmQMC-_2qvhljmK



Gambar 1.1: Tampilan layar Python Shell.

Jika sudah demikian, maka kita dapat memulai perkenalan kita dengan variabel. Di Python, variabel dapat dinamakan sebagai kombinasi antara karakter, angka, huruf besar, dan huruf kecil. Nilai yang ditugaskan ke variabel tersebut dapat berupa *float*, *integer*, bilangan kompleks, karakter / *string*, dll. Untuk lebih jelasnya, perhatikan perintah berikut di Python Shell:

```
>>> # Komentar baris!
>>> '''
... komentar
... lebih
... dari satu baris
... '''
'\nkomentar\nlebih\ndari satu baris\n'
>>> massa = 10.5 # bilangan real (float)
>>> gravitasi = 9.81 # float
>>> type(massa)
<class 'float'>
>>> kelajuan = 15 # integer
>>> type(kelajuan)
<class 'int'>
>>> a = 12 + 8j # bilangan kompleks
```

```
>>> b = complex(12, 8) # alternatif bilangan kompleks
>>> type(a)
<class 'complex'>
>>> nama = 'Faiz Fajary' # string
>>> type(nama)
<class 'str'>
```

List, *Dictionary*, dan *Tuple*

Kumpulan angka dan karakter dapat dimuat pada objek - objek *built-in* di Python, yakni *list*, *dictionary*, dan *tuple*. Berikut ini contohnya yang dimuat pada *script* `contoh_011.py` berikut ini:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_011.py

List, Dictionary, Tuple

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/19/23
"""

# list
prima = [2, 3, 5, 7, 11, 13]

fitb = ['geologi', 'geodesi', 'oseanografi', 'meteorologi']

nilai = [["Kokom", 80],
         ["Aldi", 100],
         ["Gisma", 75],
         ["Faiz", 57]]

print(prima)

print(fitb[0]) # akses elemen pertama
print(fitb[-1]) # akses elemen terakhir
print(fitb[1:3]) # akses elemen kedua & ketiga

print(nilai[1][1]) # akses nilai Aldi

# dictionary
lulusan = {
    'SHSH': 'UMD',
    'MRS': 'ITB',
```

```
    'NJT':'KU'
}

print(lulusan['MRS']) # akses nilai dari key MRS

# tuple : list tapi konten-nya ga bisa diubah
# kadang bisa digunakan untuk menghemat memori
# tapi tidak akan kita bahas di buku ini

t = ('Meteorologi', 128, 'Oseanografi', 129)

print(t[0]) # akses elemen pertama
print(t[1:]) # akses elemen kedua hingga akhir
```

Untuk menjalankan kode tersebut, kalian perlu mengetikkan `chmod +x contoh_011.py`, kemudian `./contoh_011.py` di *command line*. Atau dapat juga dengan menggunakan cara yang lebih mudah yakni `python contoh_011.py` pada *command line*. Hasil-nya adalah sebagai berikut:

```
[2, 3, 5, 7, 11, 13]
geologi
meteorologi
['geodesi', 'oseanografi']
100
ITB
Meteorologi
(128, 'Oseanografi', 129)
```


Array

Array merupakan objek pada pustaka NumPy yang berbentuk seperti vektor dan/atau matriks, namun dapat juga dioperasikan seperti kumpulan bilangan biasa. Untuk menggunakan *array* kita harus terlebih dahulu mengimpor pustaka NumPy, dan kita juga membutuhkan modul `scipy.linalg` dari pustaka SciPy untuk mengakses fungsi `eigenvals()` untuk menghitung nilai dan vektor eigen dari matriks:

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_012.py

Array

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
```

```
12/19/23
"""

# mengimpor pustaka
import numpy as np
from scipy.linalg import eig

vek = np.array([1, 2, 8])
print('Vek: ', vek)
print("\n")

# vektor kolom
kol_vek = vek.reshape(-1, 1)
print('kol_vek: ', kol_vek)
print("\n")

kol_vek1 = np.array([[1], [2], [8]])
print('kol_vek1: ', kol_vek1)
print("\n")

kol_vek2 = np.array([[1],
          [2],
              [8]])
print('kol_vek2: ', kol_vek2)
print("\n")

# matriks
mat = np.array([[1, 2, 6],[3, 4, 9], [1, -2, 7]])
print('mat: ', mat)
print("\n")

mat1 = np.array([[1, 2, 6],
        [3, 4, 9],
        [1, -2, 7]])

print('mat1: ', mat1)
print("\n")

# ekstraksi array
a = vek[2] # ekstrak elemen ketiga
print('a: ', a)
print("\n")

b = vek[:1] # ekstrak elemen 1-2
print('b: ', b)
print("\n")

c = vek[:] # esktrak seluruh elemen
print('c: ', c)
```

```
print("\n")

d = vek[-1] # ekstrak elemen terakhir
print('d: ', d)
print('\n')

vek_dua = mat[:, 1] # ekstrak kolom kedua
print('vek_dua: ', vek_dua)
print("\n")

dua_satu = mat[1, 0] # ekstrak elemen 2,1
print('dua_satu: ', dua_satu)
print("\n")

# operasi array
vek2 = vek + vek # penjumlahan
print('Penjumlahan: ', vek2)
print("\n")

vek3 = vek * 2 # perkalian skalar
print('Perkalian skalar: ', vek3)
print("\n")

vek4 = vek * vek # perkalian antar elemen
print('Perkalian antar elemen: ', vek4)
print("\n")

vek5 = np.dot(vek, vek) # perkalian titik
print('Perkalian titik: ', vek5)
print("\n")

vek6 = np.cross(vek, vek) # perkalian silang
print('Perkalian silang: ', vek6)
print('\n')

nilai_eigen, vek_eigen = eig(mat) # dekomposisi eigen
print("Nilai Eigen: ", nilai_eigen)
print("Vektor Eigen: ", vek_eigen)
```

Hasilnya adalah:

```
Vek:  [1 2 8]

kol_vek:  [[1]
 [2]
 [8]]

kol_vek1:  [[1]
```

```
 [2]
 [8]]

kol_vek2:  [[1]
 [2]
 [8]]

mat:  [[ 1  2  6]
[ 3  4  9]
[ 1 -2  7]]

mat1:  [[ 1  2  6]
[ 3  4  9]
[ 1 -2  7]]

a:  8

b:  [1]

c:  [1 2 8]

d:  8

vek_dua:  [ 2  4 -2]

dua_satu:  3

Penjumlahan:  [ 2  4 16]

Perkalian skalar:  [ 2  4 16]

Perkalian antar elemen:  [ 1  4 64]

Perkalian titik:  69

Perkalian silang:  [0 0 0]

Nilai Eigen:
[-0.7043738+0.j 6.3521869+3.68759402j 6.3521869-3.68759402j]
Vektor Eigen:
[[ 0.95060044+0.j -0.43574734-0.06069503j -0.43574734+0.06069503j]
```

```
[-0.24732462+0.j -0.83513823+0.j -0.83513823-0.j]
[-0.18758821+0.j -0.07301769-0.32195174j -0.07301769+0.32195174j]]
```

Fungsi

Seeperti pada kebanyakan bahasa pemrograman lainnya, Python juga menyediakan fungsi untuk memperingkas operasi rutin sehingga kode yang dituliskan menjadi efisien dan mudah dimengerti. Segala sesuatu yang dideklarasikan di dalam suatu fungsi bersifat lokal, untuk membuat-nya menjadi dapat diakses dari luar fungsi, kita membutuhkan *keyword* `global`. Berikut adalah contoh pendefinisian fungsi di Python:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_013.py

Fungsi

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/19/23
"""

# contoh fungsi dengan 1 input, 1 luaran
def konduktivitas(T):
  a = 2150
  b = 1.05
  y = a + b/((T + 273) - 73.15)
  return y

k_10 = konduktivitas(10)
print('Konduktivitas pada T(10): ', k_10)
print('\n')

# contoh fungsi dengan 2 input, 3 luaran
def hipot(x, y):
  z = (x**2 + y**2)**(1/2)
  l = x + y + z
  v = x * y * z * l
  return z, l, v

z1, l1, v1 = hipot(3, 4)

print('z: ', z1)
print('\n')
print('l: ', l1)
print('\n')
```

```
print('v: ', v1)
```

Hasilnya:

```
Konduktivitas pada T(10):  2150.0050035739814
z:  5.0

l:  12.0

v:  720.0
```

Kita juga dapat mempersingkat fungsi dengan menggunakan fungsi anonim, yang dikenal sebagai ekspresi `lambda`:

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_014.py

Ekspresi lambda

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/19/23
"""

# contoh ekspresi lambda dengan 1 input, 1 luaran
konduktivitas = lambda T: 2150 + 1.05 / ((T + 273) - 73.15)
k_10 = konduktivitas(10)
print('Konduktivitas pada T(10): ', k_10)
print('\n')

# contoh ekspresi lambda dengan 2 input, 3 luaran
hipot = lambda x, y: ((x**2 + y**2)**(1/2),\
            x + y + (x**2 + y**2)**(1/2),\
            x * y * ((x**2 + y**2)**(1/2))\
            * (x + y + (x**2 + y**2)**(1/2)))

z1, l1, v1 = hipot(3, 4)

print('z: ', z1)
print('\n')
print('l: ', l1)
print('\n')
print('v: ', v1)
```

Hasilnya sama dengan luaran fungsi di atas.

Pengulangan dan Percabangan

Berikut adalah struktur pengulangan dan percabangan sederhana di Python. Kita akan menggunakan struktur ini dalam banyak hal dalam komputasi numerik. Di sini kita tidak menjelaskan tentang struktur pengulangan dan percabangan yang kompleks seperti strukur `if-elif-else` di dalam pengulangan bersarang. Disarankan pembaca mencari tahu sendiri tentang hal tersebut.

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_015.py

Struktur pengulangan & percabangan

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/20/23
"""
while True:
    input_pengguna = input("Masukkan nomor: ")

    try:
        nomor = int(input_pengguna)
        break  # keluar dari pengulangan while jika tidak bisa dikonversi
    except ValueError:
        print("Nomor-nya ga bener, Bro!")

# cek nomor dengan menggunakan percabangan
if nomor > 0:
    print("Positif")
elif nomor == 0:
    print("Nol")
else:
    print("Negatif.")

# gunakan pengulangan for untuk menampilkan kata
print(f"Tutorial untuk menampilkan 'Atmosphaira!' sebanyak {nomor} kali:")
for _ in range(nomor):
    print("Atmosphaira!")
```

Contoh eksekusinya:

```
Masukkan nomor: 3
Positif
Tutorial untuk menampilkan 'Atmosphaira!' sebanyak 3 kali:
```

```
Atmosphaira!
Atmosphaira!
Atmosphaira!
```

Mengimpor Pustaka

Sebagai salah satu bahasa pemrograman yang paling populer, tersedia banyak sekali pustaka Python yang dapat membantu kita untuk menyelesaikan komputasi sesuai dengan kebutuhan domain keilmuan kita masing - masing. Oleh karena buku ini berfokus pada dasar - dasar komputasi numerik, kita hanya akan menggunakan NumPy, Matplotlib, dan SciPy, seperti yang telah kita bahas sebelumnya. Seluruh persyaratan pustaka ini telah dipenuhi ketika kalian melalukan instalasi Anaconda.

Guna melihat pustaka apa saja yang terdapat pada lingkungan komputasi Python, kita dapat menggunakan perintah `pip list` di *command line*. Untuk mengetahui secara detail mengenai pustaka tertentu, gunakan perintah `pip show [nama_pustaka]`.

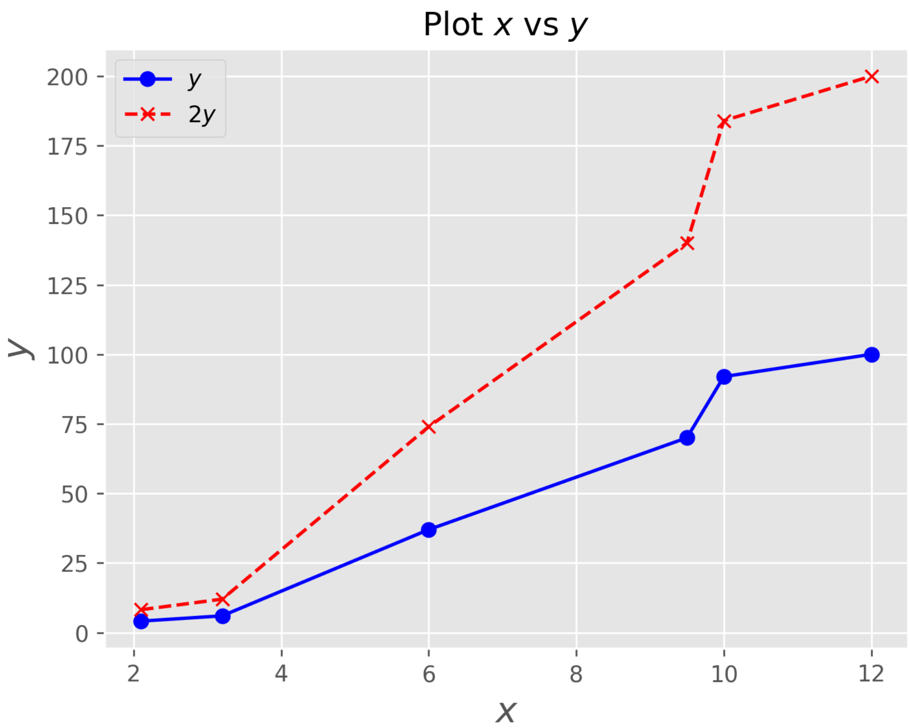
Terdapat beberapa cara untuk mengimpor pustaka di Python. Berikut adalah perintah di Python Shell guna mengilustrasikan keempat cara yang umum digunakan:

```
>>> # 1. Cara yang sangat tidak dianjurkan
>>> # mengimpor seluruh pustaka tanpa pengaliasan
>>> from numpy import *
>>> v = array([1,2,3])
>>>
>>> # 2. Mengimpor fungsi tertentu dari pustaka
>>> from numpy import array
>>> v = array([1,2,3])
>>>
>>> # 3. Mengimpor seluruh pustaka menggunakan nama pustaka
>>> import numpy
>>> v = numpy.array([1,2,3])
>>>
>>> # 4. Mengimpor pustaka dengan pengaliasan
>>> import numpy as np
>>> v = np.array([1,2,3])
```

Plotting

Buku ini hanya menggunakan fungsi - fungsi grafis dari pustaka Matplotlib untuk keperluan *plotting*. Berikut merupakan contoh kode Python yang digunakan untuk *plotting* 2D yang hasilnya ditunjukkan pada Gambar 1.2:

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_016.py

Plot 2D

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/20/23
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("ggplot") # biar keren

# Data
x = np.array ([2.1, 3.2, 6,
          9.5, 10, 12])

y = np.array ([4.1, 6, 37 ,
          70, 92, 100])

plt.close("all") # tutup plot2 sebelumnya
fig = plt.figure(1) # jumlah figure
plt.plot ( x, y,"b-o", x, y *2, "r--x")
plt.title (r"Plot $x$ vs $y$")
plt.legend ([r"$y$" , r"$2y$"])
plt.xlabel (r'$x$', fontsize=16)
plt.ylabel (r'$y$', fontsize=16)
plt.savefig("../gambar/gambar012.png", dpi=250)
```

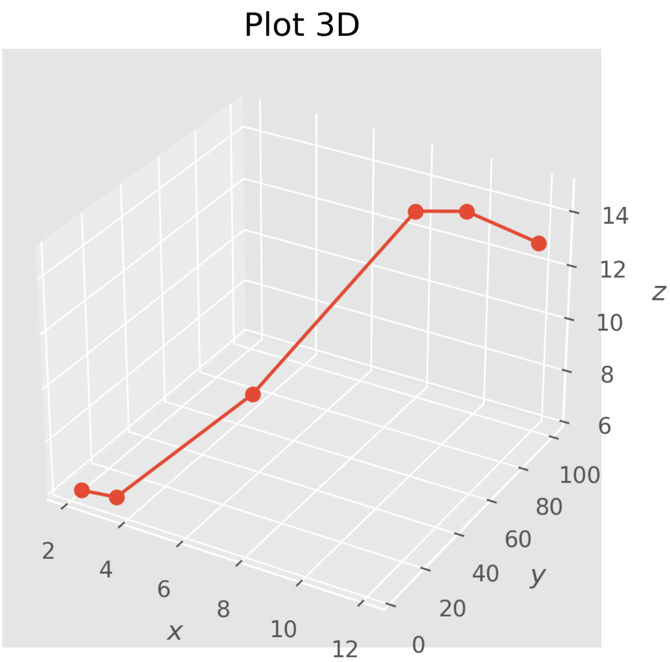


Gambar 1.2: Contoh *Plotting* 2D.

Berikut merupakan contoh grafik 3D (Gambar 1.3):

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_017.py

Plot 3D

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/20/23
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

plt.style.use("ggplot")  # agar tampilan lebih menarik

# data
x = np.array([2.1, 3.2, 6, 9.5, 10, 12])
y = np.array([4.1, 6, 37, 70, 92, 100])
```

```
z = np.array([6, 6, 9, 15, 14, 13.])

plt.close("all")  # tutup plot sebelumnya

fig = plt.figure(1)
ax = plt.axes(projection="3d")
ax.plot(x, y, z, "-o")
ax.set_title("Plot 3D")
ax.set_xlabel(r"$x$")
ax.set_ylabel(r"$y$")
ax.set_zlabel(r"$z$")

plt.savefig("../gambar/gambar013.png", dpi=250)
```

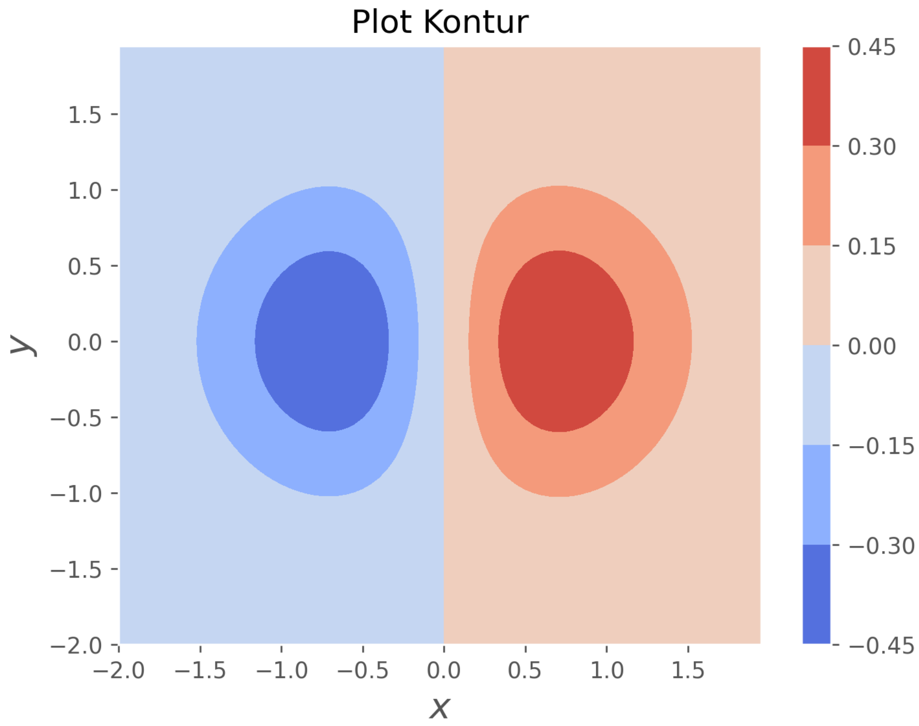


Gambar 1.3: Contoh *Plotting* 3D.

135 Berikut merupakan contoh grafik kontur (Gambar 1.4):

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_018.py

```

```
Plot Kontur

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/20/23
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("ggplot") # biar keren

# membuat grid
x = np.arange(-2, 2, .05)
y = np.arange (-2, 2, .05)
xx, yy = np.meshgrid(x, y)

# membuat zz untuk seluruh titik
zz = xx * np.exp(-xx**2 - yy**2)

# plot
plt.contourf(xx, yy, zz, cmap="coolwarm")
plt.colorbar()
plt.title ("Plot Kontur")
plt.xlabel (r"$x$", fontsize=16)
plt.ylabel (r"$y$", fontsize=16)
plt.savefig("../gambar/gambar014.png", dpi=250)
```

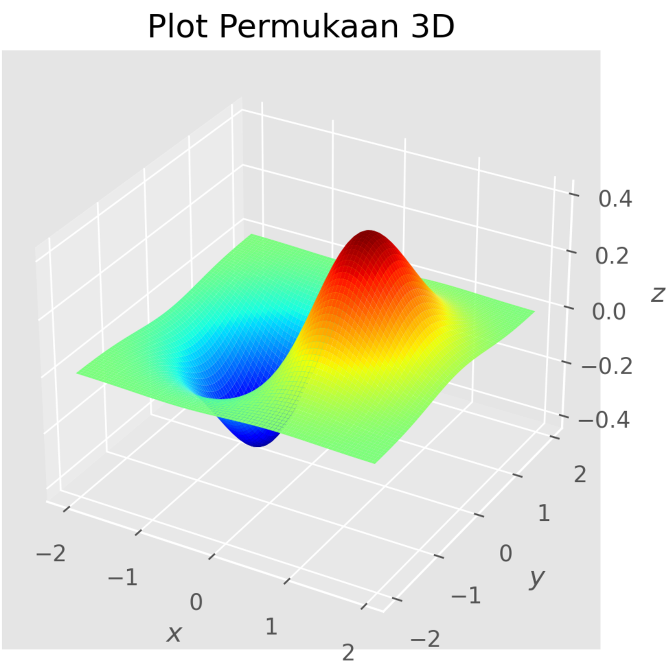


Gambar 1.4: Contoh *Plotting* kontur.

Berikut merupakan contoh grafik permukaan 3D (Gambar 1.5):

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_019.py

Plot Permukaan 3D

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/20/23
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

plt.style.use("ggplot") # biar keren

# membuat grid
x = np.arange(-2, 2, .05)
y = np.arange (-2, 2, .05)
```

```python
xx, yy = np.meshgrid(x, y)

# membuat zz untuk seluruh titik
zz = xx * np.exp(-xx**2 - yy**2)

# Plot
plt.close("all")  # tutup plot sebelumnya
fig = plt.figure(1)
ax = plt.axes(projection="3d")
ax.plot_surface (xx, yy, zz, cmap="jet",
             rstride=1 , cstride =1 , linewidth =0)
ax.set_title("Plot Permukaan 3D")
ax.set_xlabel(r"$x$")
ax.set_ylabel(r"$y$")
ax.set_zlabel(r"$z$")
plt.savefig("../gambar/gambar015.png", dpi=250)
```



Gambar 1.5: Contoh *Plotting* permukaan 3D.

2

Akar - Akar Persamaan Berderajat Tinggi

Persamaan - persamaan berderajat tinggi dapat berupa persamaan suku banyak atau persamaan yang memuat fungsi - fungsi radikal dan/atau transendental (fungsi - fungsi trigonometrik dan logaritmik). Salah satu contoh sederhana dari persamaan berderajat tinggi adalah persamaan kuadrat yang sudah kalian pelajari semenjak SMP dahulu, sebagai berikut ini,

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.1}$$

Akar - akar dari persamaan 2.1 dapat dengan mudah diselesaikan secara analitik melalui persamaan sebagai berikut,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.2}$$

Namun dalam banyak kasus pada persamaan suku banyak dan persamaan yang memuat fungsi transendental, metode penyelesaian analitik terkadang sulit untuk dilakukan, sehingga kita memerlukan metode penyelesaian numerik.

Metode Iterasi Sederhana

Metode iterasi sederhana merupakan metode numerik termudah untuk mencari akar - akar persamaan berderajat tinggi. Langkah awal yang dilakukan oleh metode iterasi sederhana adalah menyusun ulang persamaan ke dalam bentuk, di mana variabel yang tidak diketahui berada di sebelah kiri dari persamaan. Nilai awal (tebakan awal) disubstitusikan di sebelah kanan persamaan, kemudian didapatkanlah nilai baru untuk variabel tersebut. Iterasi ini akan terus berlanjut sampai nilai lama dan nilai baru variabel tersebut menjadi setara. Nilai ini merupakan salah satu akar dari persamaan, nilai akar lainnya didapatkan dengan mengikuti prosedur yang sama namun dengan nilai tebakan awal yang berbeda.

Berikut adalah langkah - langkah pengerjaannya:

1. Susun ulang persamaan, sehingga seluruh variabel berada di sisi kiri persamaan.
2. Tebak nilai awal dari variabel guna mengeksekusi iterasi pertama.
3. Substitusikan variabel di sisi kanan persamaan dan hitung nilai baru untuk variable ini.
4. Jika nilai baru variabel ini tidak sesuai dengan nilai sebelumnya, maka gunakan nilai baru sebagai nilai variabel ini.
5. Ulangi langkah 3 dan 4, hingga nilai baru sama dengan nilai variabel yang lama.
6. Jika nilai baru tidak mendekati nilai lama (dengan selisih meningkat pada setiap iterasi), hentikan penghitungan dan pertimbangkan untuk mencoba nilai awal lain atau melakukan penataan ulang terhadap persamaan yang diberikan.

Contoh pengerjaannya secara praktis dapat diilustrasikan dalam kasus berikut ini:

Misalkan kita mempunyai persamaan sebagai berikut:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \tag{2.3}$$

Melalui pelajaran di bangku SMA, kita dengan mudah menebak solusi analitik-nya, yakni $x = 1$ dan $x = 1,5$, namun tidak ada salahnya untuk menggunakan contoh ini sebagai langkah awal untuk memahami penyelsaian numeriknya melalui metode iterasi sederhana. Langkah awal algoritma ini dilakukan dengan memindahkan ruas persamaan sebagai berikut:

$$x = \frac{2x^2 + 3}{5} \tag{2.4}$$

, atau:

$$x = \sqrt{\frac{5x - 3}{2}} \tag{2.5}$$

Untuk lebih memahaminya secara praktis, jalankan kode berikut ini:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_021.py

Perhitungan metode iterasi sederhana

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/12/23
"""

x = 0 # tebakan awal
for iterasi in range(1, 100 + 1): # asumsi: iterasi 100x cukup!
  print(iterasi, x) # menampilkan jumlah iterasi & x
  x_baru = (2*x**2 + 3) / 5 # menghitung dan mengeluarkan nilai x_baru
  if x == x_baru: # kondisi kesetaraan
    break # keluar dari pengulangan for
  x = x_baru # penugasan nilai x_baru ke x
print(iterasi, x_baru) # menampilkan jumlah iterasi dan x_baru di akhir pengulangan
```

Perhatikan jika, kita menambahkan angka 1 pada akhir iterasi, hal ini patut diingat karena jika tidak Python hanya akan melakukan perhitungan dari 0 hingga 99.

Akurasi Solusi Numerik

Kedua Baris akhir pada luaran program menunjukkan hasil perhitungan, masing - masing untuk `x` dan `x_baru`:

```
100 0.9999999999394882
100 0.9999999999515905
```

Karena solusi diperoleh secara numerik dengan menggunakan komputer, nilai-nilai tersebut secara langsung dipengaruhi oleh ketepatan tipe data variabel. Sebagai contoh, ketik penjumlahan sederhana ini di Python Shell dan tampilan hasilnya:

```
>>> x = 1.2 + 3.456789101112131415l6
>>> print(x)
4.656789101112131
>>> type(x)
<class 'float'>
```

Ini menunjukkan bahwa tipe data *float*, yang setara dengan *double* dalam beberapa bahasa pemrograman lain, akurat hingga digit desimal ke-16 dalam konteks ini. Dengan demikian berarti bahwa syarat guna memenuhi kondisi kesetaraan secara eksak sangat sulit dicapai, bahkan tidak mungkin dalam beberapa kasus dengan jumlah digit desimal yang sangat besar, seperti konstanta π. Oleh karena itu, menjadi suatu kelaziman dalam metode numerik untuk menentukan **derajat ketelitian** (*degree of accuracy*) yang diperlukan dalam menentukan keakuratan solusi. Sebagai contoh, akurasi hingga digit desimal ketiga dapat diterima bagi seorang oseanografer ketika nilai-nilai tersebut dalam satuan meter, tapi tidak pada komunitas fisika partikel yang membutuhkan keakuratan hingga 20 digit.

Oleh karenanya, algoritma iterasi sederhana harus dimodifikasi sedemikian rupa sehingga dapat mempertimbangkan tingkat ketelitian yang diperlukan untuk permasalahan tersebut. Dalam banyak referensi, hal ini disebut sebagai **toleransi numerik** (*numerical tolerance*), yang mewakili **perbedaan maksimum mutlak** (*absolute maximum difference*) yang dapat diterima antara nilai-nilai variabel persamaan yang dihasilkan dari dua iterasi berturut-turut. Dengan kata lain, ini adalah perbedaan antara nilai lama dan nilai baru. Penerapannya dapat dilihat pada contoh sebagai berikut:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_022.py

Perhitungan metode iterasi sederhana
dengan derajat ketelitian

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/12/23
"""

x = 0 # tebakan awal
for iterasi in range(1,101): # asumsi: iterasi 100x cukup!
  x_baru = (2*x**2 + 3)/5 # menghitung dan mengeluarkan nilai x_baru
  if abs(x - x_baru) < 0.000001: # kondisi derajat ketelitian
    break # keluar dari pengulangan for
  x = x_baru # penugasan nilai x_baru ke x
print('Akar: %.5f' %x_baru) # menampilkan akar hingga keakurasian 5 digit
print('Jumlah iterasi: %d' %iterasi) # menampilkan jumlah iterasi
```

Luarannya adalah sebagai berikut:

```
Akar: 1.00000
Jumlah iterasi: 50
```

Permasalahan tersebut, selain dapat dikerjakan dengan metode pengulangan `for`, juga dapat dikerjakan dengan metode pengulangan `while` sebagai berikut sebagai alternatifnya:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_023.py

Perhitungan metode iterasi sederhana
dengan derajat ketelitian
dengan pengulangan while

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/12/23
"""
x = 5 # nilai arbitrer
x_baru = 0 # tebakan awal
iterasi = 0
while abs(x_baru - x) >= 0.000001:
    iterasi += 1
    x = x_baru
    x_baru = (2*x**2 + 3)/5

print('Akar: %0.5f' %x_baru)
print('Jumlah iterasi: %d' %iterasi)
```

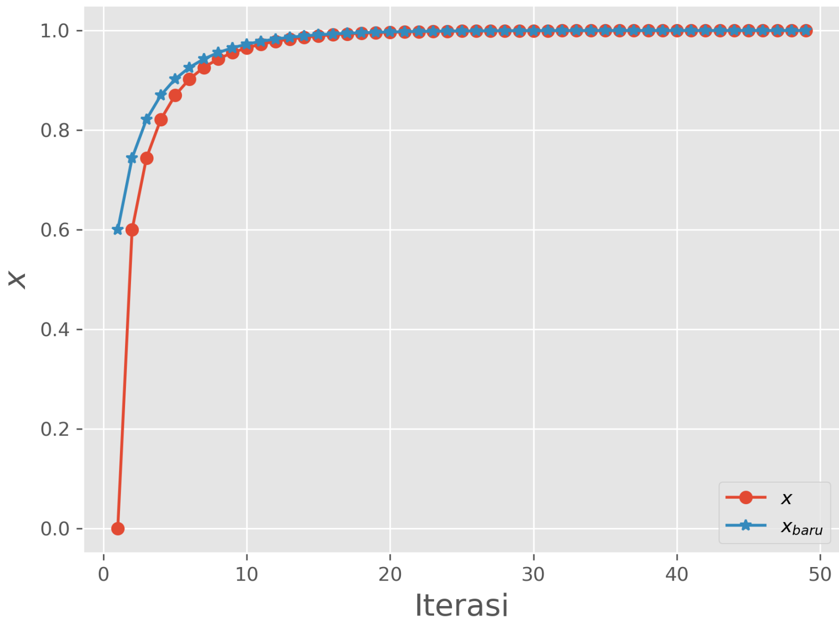
Untuk menemukan nilai akar kedua, dapat diuji dengan nilai tebakan awal yang berbeda. Jika solusinya tidak juga ditemukan, perlu dilakukan penataan ulang dari persamaan yang diberikan, dalam konteks ini menggunakan persamaan 2.5.

Konvergensi dan Divergensi Numerik

Solusi yang diperoleh untuk persamaan kuadrat yang kita bahas sebelumnya (persamaan 2.3) menunjukkan bahwa kedua nilai variabel semakin mendekat pada setiap iterasi, dan pada iterasi ke-50, kedua nilai tersebut dianggap sama ketika kondisi akurasi yang dipersyaratkan terpenuhi. Perilaku ini dikenal sebagai konvergensi nilai ke suatu solusi yang spesifik (Gambar 2.1). Berikut adalah contoh kode yang digunakan untuk menampilkan konvergensi pada persamaan 2.3:

```python
#!/usr/bin/env python
```

```python

"""
contoh_024.py

Konvergensi

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/12/23
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('ggplot')

fn = lambda x: (2*x**2 + 3)/5 # definisi fungsi

# list yang digunakan untuk plotting
xlist = list()
xlist_baru = list()
itrlist = list()

x = 0
for iterasi in range(1, 50):
    x_baru = fn(x)

    # untuk plotting
    xlist.append(x)
    xlist_baru.append(x_baru)
    itrlist.append(iterasi)

    # kondisi konvergensi
    if abs(x_baru - x) < 0.000001:
        break
    x = x_baru

print('Akar: %0.5f' %x_baru)
print('Jumlah iterasi: %d' %iterasi)

# plotting
plt.plot(itrlist, xlist, '-o', itrlist, xlist_baru,'-*')
plt.legend(['$x$','$x_{baru}$'],loc = 'lower right')
plt.xlabel('Iterasi', fontsize=16)
plt.ylabel(r'$x$', fontsize=16)
plt.tight_layout()
plt.savefig('../gambar/gambar021.png', dpi=300)
```

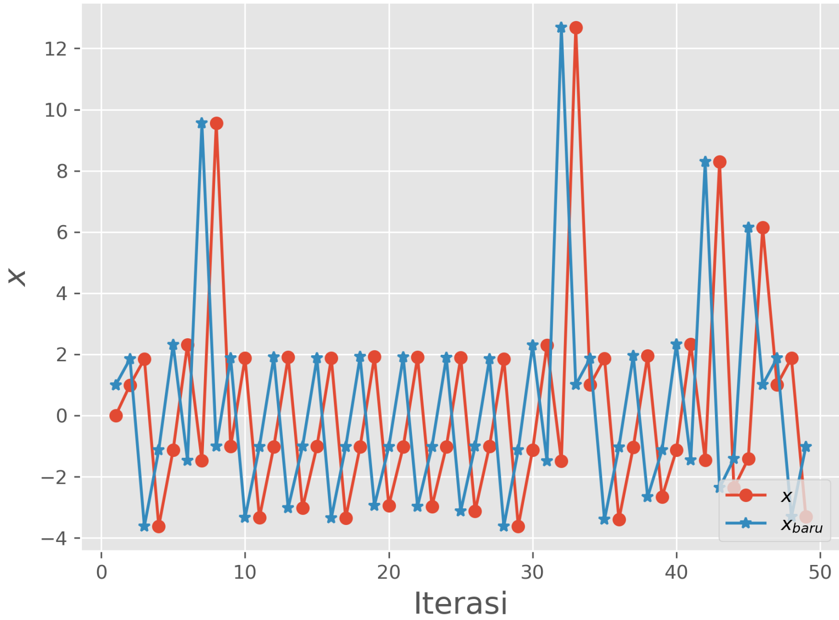


Gambar 2.1: Grafik berikut menunjukkan konvergensi ke nilai satu.

Sebaliknya, divergensi terjadi ketika selisih nilai variabel semakin besar pada setiap iterasi hingga nilai akhir iterasi tercapai. Perbedaan tersebut dapat disebabkan oleh banyak faktor, tergantung pada jenis persamaan, tebakan awal, dan/atau metode penataan ulang persamaan. Gambar 2.2 menunjukkan perilaku variabel jika terjadi divergensi untuk persamaan $x\cos(x) - 1 = 0$ yang dihasilkan melalui kode sebagai berikut:

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_025.py

Divergensi

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/12/23
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('ggplot')

fn = lambda x:  1/np.cos(x) # definisi fungsi

# list yang digunakan untuk plotting
```

```
xlist = list()
xlist_baru = list()
itrlist = list()

x = 0
for iterasi in range(1, 50):
    x_baru = fn(x)

    # untuk plotting
    xlist.append(x)
    xlist_baru.append(x_baru)
    itrlist.append(iterasi)

    # kondisi konvergensi
    if abs(x_baru - x) < 0.000001:
        break
    x = x_baru

print('Akar: %0.5f' %x_baru)
print('Jumlah iterasi: %d' %iterasi)

# plotting
plt.plot(itrlist, xlist, '-o', itrlist, xlist_baru,'-*')
plt.legend(['$x$','$x_{baru}$'],loc = 'lower right')
plt.xlabel('Iterasi', fontsize=16)
plt.ylabel(r'$x$', fontsize=16)
plt.tight_layout()
plt.savefig('../gambar/gambar022.png', dpi=300)
```



Gambar 2.2: Grafik berikut menunjukkan divergensi pada fungsi $x\cos(x) - 1 = 0$.

Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson memiliki prosedur yang sama dengan metode iterasi sederhana, namun perbedaan utama adalah pada langkah pertama pengerjaannya. Ketimbang menyusun ulang persamaan yang diberikan secara sederhana, persamaan baru harus dirumuskan dengan menggunakan persamaan yang diberikan dan turunan pertama terhadap variabel persamaan tersebut sebagai berikut:

$$x_{\text{baru}} = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{2.6}$$

Langkah pertama yang harus dilakukan guna menerapkan algoritma Newton pada persamaan 2.3 adalah dengan mencari turunan pertamanya terhadap x:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d[2x^2 - 5x + 3]}{dx} = 4x - 5 \tag{2.7}$$

Kemudian dilakukan substitusi persamaan 2.7 ke persamaan 2.6:

$$x_{\text{baru}} = x - \frac{2x^2 - 5x + 3}{4x - 5} \tag{2.8}$$

Penerapan dari persamaan 2.8 dalam Python adalah sebagai berikut:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_026.py

Metode Newton-Raphson

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/12/23
"""

x = 0
for iterasi in range(1, 101):
    x_baru = x - (2*x**2 - 5*x + 3)/(4*x - 5) # persamaan Newton-Raphson
    if abs(x_baru - x) < 0.000001:
        break
    x = x_baru
print('Akar: %0.5f' %x_baru)
print('Jumlah iterasi: %d' %iterasi)
```

Luarannya adalah sebagai berikut:

```
Akar: 1.00000
Jumlah iterasi: 7
```

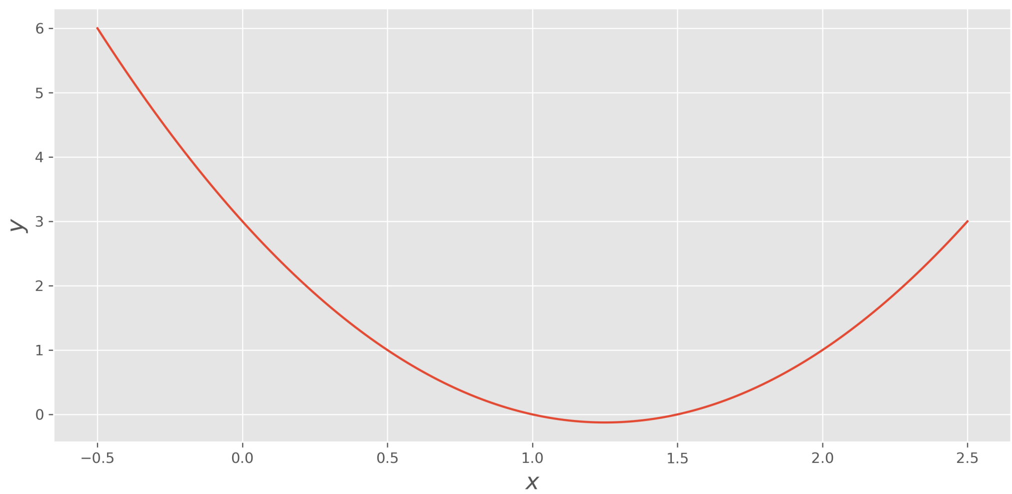
Luar biasa, bukan?! Kita dapat menemukan akar persamaan 2.3 hanya dalam tujuh kali iterasi. Hal ini menunjukkan efisiensi metode Newton-Raphson, karena dapat mencapai konvergensi sekitar delapan kali lebih cepat dibandingkan metode iterasi sederhana yang telah kita lakukan sebelumnya.

Keunggulan lainnya adalah hanya dengan sedikit mengubah nilai tebakan awal, kita dapat memperoleh solusi akar lainnya. Misalkan dengan mengubah nilai `x = 2`, maka kita dapat memperoleh nilai $x = 1,5$ sesuai dengan solusi analitik-nya:

```
Akar: 1.50000
Jumlah iterasi: 6
```

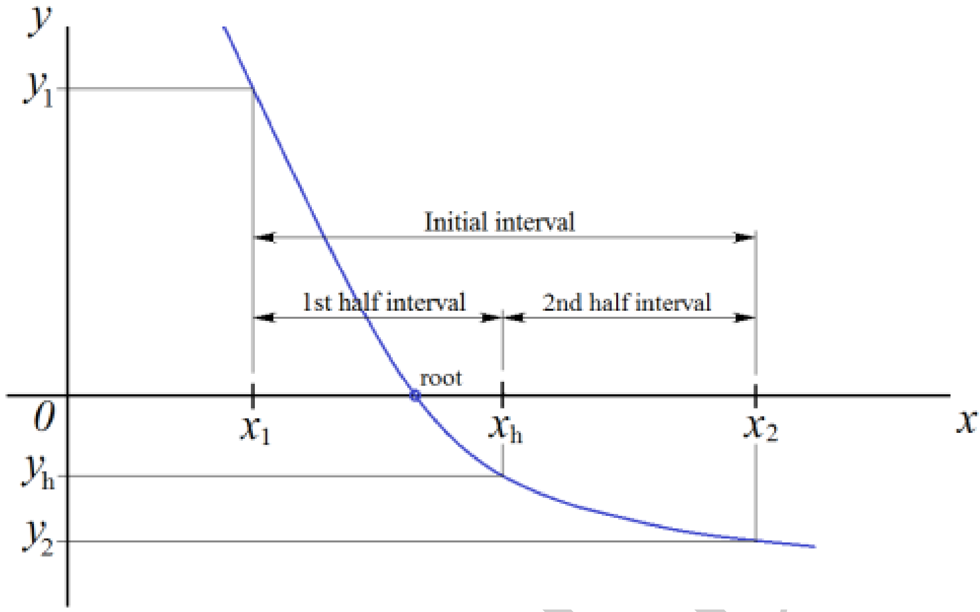
Metode Biseksi

Metode ini didasarkan pada fakta bahwa akar - akar suatu persamaan merupakan titik - titik, di mana kurva persamaan tersebut memotong sumbu x. Contohnya dapat dilihat dari representasi grafik persamaan 2.3 di Gambar 2.3.



Gambar 2.3: Representasi grafis persamaan 2.3.

Kurva memotong sumbu x pada nilai 1 dan 1,5 (ketika $y = 0$), yang merupakan akar-akar persamaan. Oleh karena itu, kita dapat membayangkan metode biseksi sebagai algoritma pencarian titik-titik ini di sepanjang sumbu x. Metode ini sebenarnya bertujuan untuk mencari titik di mana dua nilai x memiliki nilai y yang saling berkorespondensi, namun mempunyai tanda yang berbeda. Kemudian, interval antara nilai x dibagi menjadi dua bagian, yang kemudian juga separuhnya dibagi dua lagi, dan seterusnya. Dengan operasi pembagian dua yang berurutan, intervalnya menjadi lebih kecil, yang mana diharapkan nilai x_1 dan x_2 mendekati akar yang sesungguhnya. Pada titik ini, y_1 dan y_2 mendekati nol. Dengan mengubah titik pencarian awal, akar-akar lainnya dapat ditentukan dengan cara yang sama (Gambar 2.4).



Gambar 2.4: Representasi grafis metode biseksi.

Berikut adalah algoritma pencarian akar dari metode biseksi:

1. Masukkan nilai x yang berada dalam interval tebakan nilai akar.
2. Hitung nilai y sebagai korespondensinya.
3. Periksa perbedaan tanda antara nilai - nilai y.
4. Jika tanda-nya sama, maka hentikan langkah pencarian.
5. Hitung nilai x pada setengah interval.
6. Periksa perbedaan tanda antara nilai y pada separuh interval pertama.
7. Jika tandanya berlawanan, maka x_1 dan x_2 adalah batas pada interval pertama.
8. Jika tandanya sama, maka x_1 dan x_2 adalah batas interval kedua.
9. Jika nilai y mendekati nol, tampilkan nilai x dan hentikan proses pencarian.
10. Jika tidak, ulangi langkah 5 hingga 10.

Untuk lebih memahami algoritma ini, ada baiknya kita langsung menerapkannya untuk menyelesaikan persamaan 2.3 ke dalam bentuk kode Python sebagai berikut:

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_027.py

Metode Biseksi

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/13/23
"""

x1 = 0 # nilai pertama di interval
x2 = 1.2 # nilai kedua di interval
y1 = 2*x1**2-5*x1+3 # perhiungan y1
y2 = 2*x2**2-5*x2+3 # perhitungan y2

if y1*y2 > 0: # tes apa tandanya sama?
    print('Tidak ditemukan akar pada interval ini.')
    exit # program berhenti

for i in range(1,101): # asumsi: 100 biseksi cukup!
    xh = (x1+x2)/2 # hitung nilai tengah
    yh = 2*xh**2-5*xh+3 # hitung yh
    y1 = 2*x1**2-5*x1+3 # hitung y1
    if abs(y1) < 1.0e-6: # kondisi mendekati solusi?
        break # keluar dari pengulangan
    elif y1*yh < 0: # lihat apa tanda berubah pada paruh pertama
        x2 = xh # x2 titik tengah
    else: # lihat apa tanda berubah pada paruh kedua
        x1 = xh # x1 titik tengah
print('Akar: %.5f' %x1)
print('Jumlah biseksi: %d' %i)
```

Hasilnya adalah:

```
Akar: 1.00000
Jumlah biseksi: 21
```

Dengan mengubah interval awal menjadi $x_1 = 1,1$ dan $x_2 = 2$, kita akan mendapatkan nilai dari akar kedua:

```
Akar: 1.50000
Jumlah biseksi: 21
```

Kode Python di atas merupakan penerapan algoritma metode biseksi yang paling sederhana, terdapat beberapa modifikasi yang perlu dilakukan untuk meningkatkan efektivitas kode tersebut. Pertama, kita dapat melakukan pendefinisian fungsi y dengan menggunakan fungsi anonim `lambda`:

```
y = lambda x: 2*x**2 - 5*x + 3
```

Kedua, jika kita ingin membuat kode yang lebih fleksibel dengan fungsi input *run-time*, kita dapat mengubah kode-nya agar menerima input dari pengguna. Berikut adalah modifikasi dari kode sebelumnya:

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_028.py

Metode Biseksi Efektif

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/13/23
"""

y = lambda x: 2*x**2 - 5*x + 3 # pendefinisian fungsi y(x)

x1 = float(input('Masukkan nilai x1: ')) # input x1
x2 = float(input('Masukkan nilai x2: ')) # input x2

y1 = y(x1) # memanggil fungsi y(x1)
y2 = y(x2) # memanggil fungsi y(x2)

if y1*y2 > 0: # cek apakah tandanya sama?
  print('Tidak terdapat akar di interval ini.')
  exit

for i in range(100):
  xh = (x1+x2)/2
  yh = y(xh) # memanggil fungsi y(xh)
  y1 = y(x1) # memanggil fungsi y(x1)
  if abs(y1) < 1.0e-6:
    break
  elif y1*yh < 0:
    x2 = xh
  else:
    x1 = xh

print('Akar: %.5f' %x1)
print('Jumlah biseksi: %d' %(i+1))
```

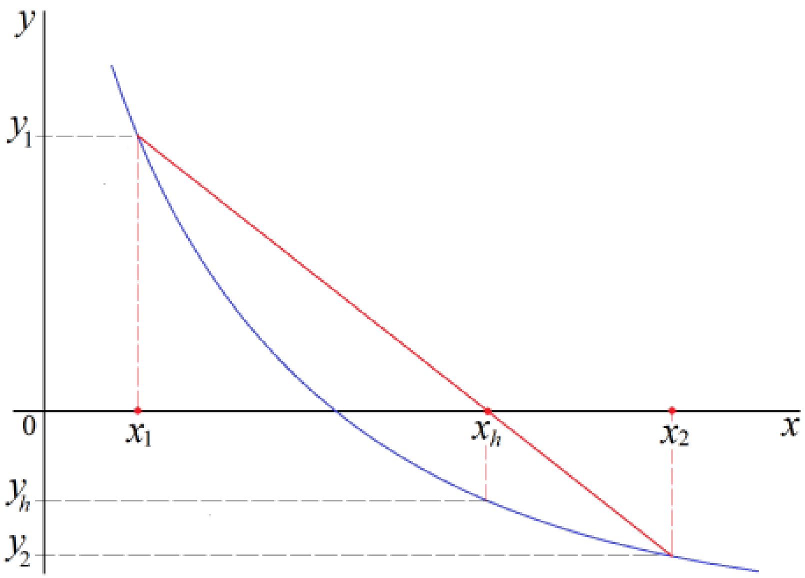
Berikut adalah contoh tampilan Python Shell, jika kita memasukkan nilai $x_1 = 1$ dan $x_2 = 1.1$ ketika menjalankan kode tersebut:

```
Masukkan nilai x1: 1
Masukkan nilai x2: 1.1
```

```
Akar: 1.00000
Jumlah biseksi: 1
```

Metode *Regula Falsi*

Langkah pengerjaan metode ini sangat mirip dengan metode biseksi karena memerlukan dua nilai awal x yang harus mencakup lokasi akar yang diharapkan, dan memiliki tanda $y(x)$ yang berbeda. Perbedaannya terletak pada cara menghitung nilai x selanjutnya. Pada metode *regula falsi* ini, posisi x_h merupakan titik potong sumbu x dan garis yang menghubungkan dua titik palsu (x_1, y_1) dan (x_2, y_2), seperti terlihat pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5: Representasi grafis metode *regula falsi*.

Dengan menggunakan persamaan kemiringan garis lurus yang telah kita pahami semenjak SMP, hubungan antara ketiga titik dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - 0}{x_2 - x_h} \tag{2.9}$$

Sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$x_h = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_2 \tag{2.10}$$

Bergantung pada tanda y_h, x_h dalam konteks ini akan diubah menjadi x_1 atau x_2 sehingga dapat menyimpan akar yang teletak diantara interval x_1 dan x_2. Hal ini dapat dicapai dengan menjaga x_1 dan x_2 pada sisi berlawanan dari sumbu x. Prosedur ini berlanjut hingga nilai y_h mendekati nol.

Untuk dapat lebih memahaminya secara praktis maka kita dapat mengimplementasikan kode Python untuk menyelesaikan persamaan 2.3, sebagai berikut:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_029.py

Metode Regula Falsi

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/14/23
"""

y = lambda x: 2*x**2 - 5*x + 3 # pendefinisian fungsi y(x)


def rfalsi(fn, x1, x2, tol = 0.001, ilimit = 100):
    y1 = fn(x1)
    y2 = fn(x2)
    xh = 0
    ipos = 0       # hitung posisi keliru
    if y1 == 0: xh = x1    # x1 -> akar
    elif y2 == 0: xh = x2 # x2 -> akar
    elif y1 * y2 > 0:    # jika y1 & y2 mempunyai tanda yg sama
        print('Tidak ditemukan akar pada interval ini.')
    else:
        for ipos in range(1,ilimit+1):
            xh = x2 - (x2-x1)/(y2-y1) * y2
            yh = fn(xh)
            if abs(yh) < tol:
                break
            elif y1 * yh < 0: # jika y1 & yh mempunyai tanda berlawanan
                x2 = xh
                y2 = yh
            else:
                x1 = xh
                y1 = yh
    return xh, ipos

x1 = float(input('Masukkan x1: '))
x2 = float(input('Masukkan x2: '))
```

```
x, n = rfalsi(y,x1,x2)

# Hasil
print('Akar: %f' %x)
print('Jumlah posisi keliru selama perhitungan: %d' %n)
x1 = float(input('Masukkan x1: '))
x2 = float(input('Masukkan x2: '))
x, n = rfalsi(y,x1,x2)

# Tampilkan hasil
print('Akar: %.5f' %x)
print('Jumlah posisi keliru selama perhitungan: %d' %n)
```

Berikut adalah salah satu contoh eksekusi-nya:

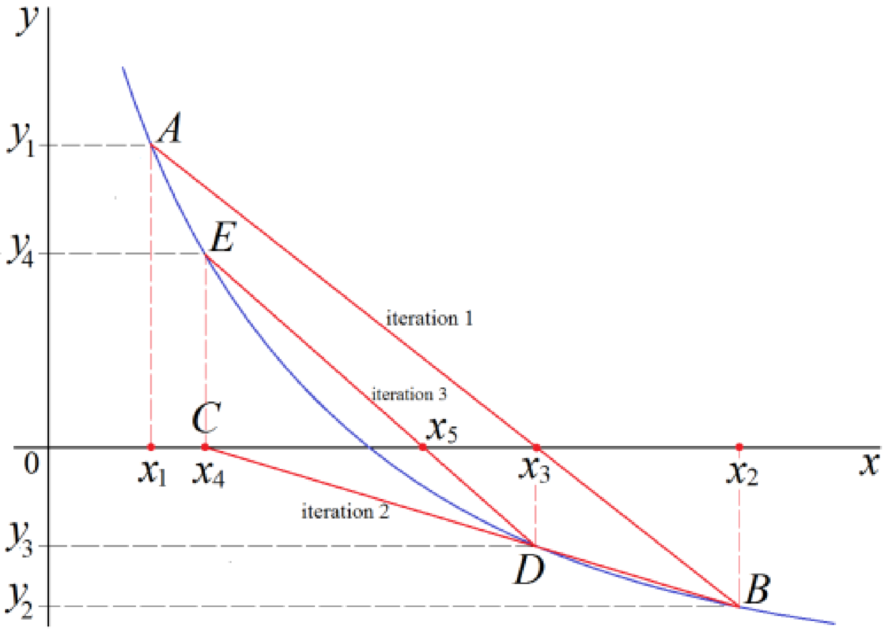
```
Masukkan x1: 0
Masukkan x2: 1.2
Akar: 1.000760
Jumlah posisi keliru selama perhitungan: 15
Masukkan x1: .5
Masukkan x2: 1.1
Akar: 1.00097
Jumlah posisi keliru selama perhitungan: 7
```

Kita juga dapat mengujinya dengan membalikan urutan awal masukan (*input*):

```
Masukkan x1: 1.2
Masukkan x2: 0
Akar: 1.000760
Jumlah posisi keliru selama perhitungan: 15
Masukkan x1: 1.2
Masukkan x2: 3
Akar: 1.49900
Jumlah posisi keliru selama perhitungan: 23
```

Metode Garis Potong

Metode garis potong (*secant method*) mungkin terlihat mirip dengan metode *regula falsi*, namun alih-alih mencari dua titik interval di mana akar - akar tersebut dapat ditemukan, metode ini menggunakan garis potong untuk menemukan akar - akar secara berurutan hingga mendekati aproksimasi akar - akar dari fungsi yang diberikan. Akibatnya, dua nilai awal x tidak harus berada di kedua sisi dari akar yang hendak diaproksimasikan. Gambar 2.6 menunjukkan cara kerja metode ini di dalam mengaproksimasi tiga dugaan akar secara berturut -turut, yakni x_3, x_4, dan x_5 melalui garis AB, BC, dan DE.



Gambar 2.6: Ilustrasi pencarian akar menggunakan metode garis potong.

Berikut ini persamaan - persamaan pada tiga langkah iterasi pertama:

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_2 \tag{2.11a}$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} y_3 \tag{2.11b}$$

$$x_5 = x_4 - \frac{x_4 - x_3}{y_4 - y_3} y_4 \tag{2.11c}$$

Atau secara umum dapat dinyatakan sebagai:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{y_{i-1} - y_{i-2}} y_{i-1} \tag{2.12}$$

Berikut contoh implementasi kode Python-nya guna menyelesaikan persamaan 2.3:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_0210.py

Metode Garis Potong

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/14/23
"""

def gar_tong(fn, x=list(), tol=1.0e-9, maxiter=100):
  [x1, x2] = x
  for iterasi in range(maxiter):
    x_baru = x2 - (x2 - x1)/(fn(x2) - fn(x1)) * fn(x2)
    if abs(x_baru - x2) < tol:
      break
    x1 = x2
    x2 = x_baru
  else:
    print('Batas iterasi telah dilampaui tanpa ada solusi.')
  return x_baru, iterasi


# definisi fungsi
f = lambda x:2*x**2 -5*x + 3

# eksekusi
sol, iterasi = gar_tong(f, [0, 8], 0.000001)

# tampilkan hasil
print('Akar: %.6f '%sol)
print('Jumlah iterasi: %d '%iterasi)
```

Hasilnya:

```
Akar: 1.000000
Jumlah iterasi: 10
```

Akar kedua-nya dapat kita temukan dengan memasukkan kondisi awal `[2, 3]`:

```
Akar: 1.500000
Jumlah iterasi: 7
```

Pada contoh ini, nilai x_1 dan x_2 dibentuk menjadi tipe data *list* terlebih dahulu sebelum dimasukkan ke dalam fungsi `gar_tong()`. Hal ini akan banyak kalian jumpai pada bab - bab selanjutnya, dan di metode numerik secara umum. Kita akan banyak menjumpai objek - objek *list* dan NumPy *array* yang dilibatkan dalam proses I/O.

Pencarian Akar - Akar Menggunakan SciPy

Nampak pada bagian - bagian terdahulu, jika proses pencarian akar - akar kuadrat saja tampak sangat rumit. Pertanyaannya, bagaimana nanti dengan pencarian akar - akar fungsi yang lebih rumit lagi? Apa kita akan menghabiskan seumur hidup hanya untuk menuliskan kode untuk mencari, misalkan akar polinomial berderajat tujuh?

Untungnya saat ini telah terdapat berbagai fungsi untuk penyesaian akar yang telah dioptimasi dan dikurasi di pustaka SciPy yang tersedia secara gratis! Jadi kita yang bukan seorang matematikawan terapan ataupun ahli komputasi numerik yang memang pekerjaannya adalah mengoptimasikan lebih lanjut algoritma - algoritma di belakang layar SciPy, dapat tinggal memanggil fungsi - fungsi pencarian akar dengan satu baris kode saja dari SciPy (mengagumkan, bukan?!)

SciPy menyediakan berbagai macam fungsi pencarian akar dalam modul pengoptimalan dan pencarian akar, yakni `scipy.optimize` untuk menyelesaikan berbagai jenis persamaan melalui metode numerik tingkat lanjut yang tidak akan kita bahas di sini (karena penyusunnya sendiri tidak mengerti sama sekali tentang itu!). Di bagian ini, mari kita selesaikan contoh yang diberikan di bagian - bagian terdahulu dengan menggunakan fungsi: `newton()`, `bisect()`, `fsolve()` dan `root()` melalui beberapa baris perintah di Python Shell sebagai berikut:

```
>>> from scipy.optimize import newton, bisect, fsolve, root
>>> f = lambda x: 2*x**2-5*x + 3

>>> print(newton(f, 0)) # memasukkan nilai tebakan 0
    0.9999999999999999
>>> print(newton(f, 3)) # memasukkan nilai tebakan 3
    1.5000000000000004

>>> print(bisect(f, 0, 1.2)) # memasukkan interval awal 0 - 1.2
    0.9999999999996361
>>> print(bisect(f, 1.2, 4)) # memasukkan interval awal 1.2 - 4
    1.4999999999994542
```

```
>>> print(fsolve(f, 2))# memasukkan tebakan awal 2
    [1.5]
>>> print(fsolve(f, 0))# memasukkan tebakan awal 0
    [1.]
>>> print(fsolve(f,[0, 1, 2])) # 3 tebakan awal bos!
    [1.  1.  1.5]
```

Pada baris terakhir, terdapat tiga tebakan awal dalam objek *list*, sehingga luarannya adalah tiga elemen dalam *array* yang mana merupakan akar yang diaproksimasi dari masing - masing nilai tebakan yang kita berikan.

```
>>> print(root(f, 0)) # tebakan 0
    message: The solution converged.
    success: True
    status: 1
    fun: [ 0.000e+00]
    x: [ 1.000e+00]
    nfev: 11
    fjac: [[-1.000e+00]]
    r: [ 1.000e+00]
    qtf: [-1.033e-10]
```

Fungsi `root()` memberikan beberapa atribut terkait dengan proses komputasi numeriknya yang tidak begitu menarik dalam sudut pandang praktisi seperti kita. Oleh karena itu, untuk mendapatkan akar-nya saja, kita hanya perlu mengakses *array* `x` dari luaran tersebut:

```
>>> print(root(f, 0).x) # tebakan 0
    [1.]
>>> print(root(f, 2).x) # tebakan 2
    [1.5]
>>> print(root(f, [0,1,2]).x) # 3 nilai tebakan
    [1.  1.  1.5]
```

Untuk mengetahui tentang pengunaan modul optimasi dan pencarian akar di SciPy, kalian dapat berkunjung ke tautan berikut ini: `https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/optimize.html#module-scipy.optimize`.

3

Interpolasi dan Pencocokan Kurva

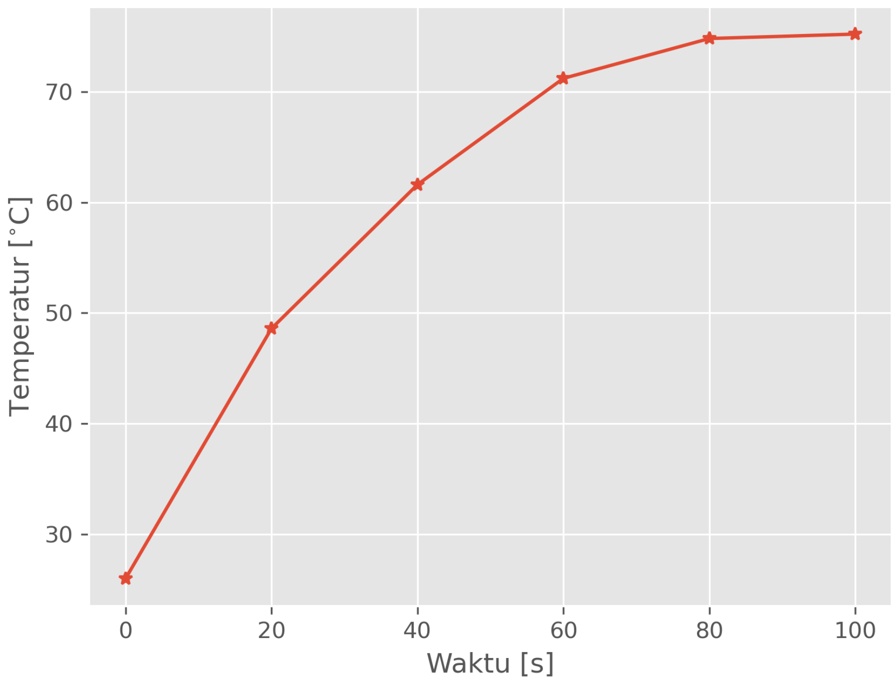
Interpolasi Linier

Interpolasi linier mengasumsikan penggunaan persamaan garis lurus untuk menginterpolasi titik - titik di antara sepasang titik tertentu pada data. Salah satu contoh penggunaannya adalah pada contoh kasus sebagai berikut, misalkan kita sedang mengukur temperatur reaksi kimia pada durasi tertentu seperti yang ditunjukkan pada Tabel **??** berikut ini:

Waktu (s)	20	40	60	80	100
Temperatur (°C)	26.0	48.6	61.6	74.8	75.2

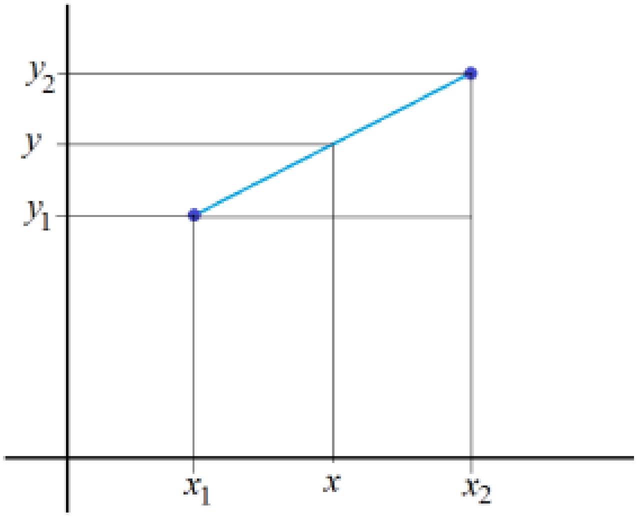
Tabel 3.1: Data temperatur sebagai fungsi waktu pada suatu reaksi kimia.

Grafik linier-nya dapat dilihat sebagai berikut:



Gambar 3.1: Grafik linieritas hubungan waktu reaksi dan temperatur.

Jika kita ingin mengetahui temperatur reaksi pada detik ke 50, namun hal tersebut luput dari pengukuran, bagaimana cara mengatasinya? Metode paling sederhana yang sering digunakan di SMP dan SMA untuk mencari nilai tengah dari Tabel 3.1 adalah interpolasi linier. Pada metode ini, bagian kurva yang menghubungkan dua titik yang kita ketahui (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) dianggap sebagai garis lurus. Dalam hal ini, bayangkan suatu garis lurus antara (40; 61,6) dan (60; 71,2) (Gambar 3.2).



Gambar 3.2: Representasi grafis interpolasi linier.

Oleh karena kesamaan pada kemiringan garis lurus tersebut, maka kita dapat menuliskan persamaan sebagai berikut, sebagaimana yang telah kita pelajari di bangku SMP:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{3.1}$$

Maka, nilai y pada suatu nilai x tertentu dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{3.2}$$

Persamaan sederhana ini dapat disimpan dalam kalkulator saku yang dapat diprogram dan digunakan untuk mencari nilai interpolasi dari tabel di berbagai bidang sains dan teknik.

Kembali ke permasalahan temperatur pada reaksi kimia dalam contoh sebelumnya. Dengan menerapkan persaman 3.2, maka temperatur pada detik ke-50 dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$T(50) = 61.6 + \frac{71.2 - 61.6}{60 - 40}(50 - 40) = 66.4°\text{C} \tag{3.3}$$

Kerugian dari metode interpolasi linier adalah bahwa titik-titik lain, kecuali dua titik yang berdekatan dengan titik yang diinginkan, diabaikan sama sekali. Dengan demikian, tren kurva secara kesuluruhan tidaklah tergambar.

Pada bagian selanjutnya, kita akan berkenalan dengan dua metode interpolasi yang banyak digunakan di sains dan rekayasa, yakni metode interpolasi Lagrange dan Newton.

Metode Lagrange

Metode ini didasarkan pada pembentukan suku banyak berderajat n, di mana derajatnya bergantung pada jumlah titik yang dipertimbangkan pada data, yakni sebanyak $n+1$ titik. Sebagai contoh, untuk polinomial derajat ketiga (kubik), maka $n = 3$, sehingga diperlukan empat titik data yang dapat dituliskan dengan persamaan suku banyak sebagai berikut:

$$y(x) = y_1\ell_1(x) + y_2\ell_2(x) + y_3\ell_3(x) + y_4\ell_4(x) \tag{3.4}$$

Persamaan 3.4 dapat diringkas ke dalam notasi sebagai berikut:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i\ell_i(x) \tag{3.5}$$

, di mana:

$$\ell_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \tag{3.6a}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \tag{3.6b}$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \tag{3.6c}$$

$$\ell_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \tag{3.6d}$$

Ringkasnya adalah sebagai berikut:

$$\ell_i = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right) \tag{3.7}$$

Maka, secara lebih umum metode Lagrange dapat dituliskan menjadi:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right) \right) \tag{3.8}$$

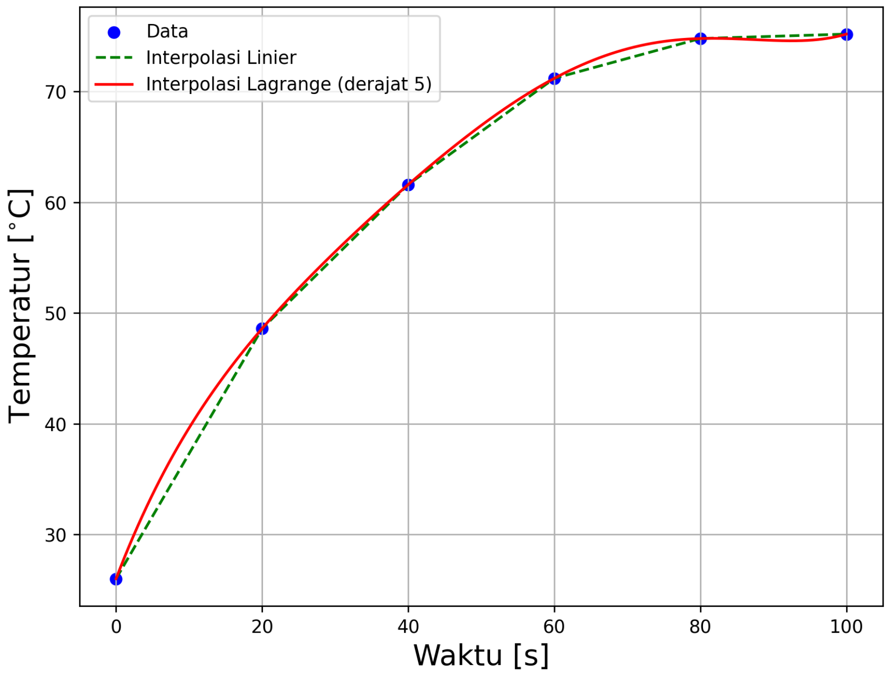
Berikut ini merupakan implementasi kode Python dari persamaan 3.8 untuk menyelesaikan permasalahan interpolasi pada Tabel 3.1:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_031.py

Metode Lagrange

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/15/23
"""

x = [0, 20, 40, 60, 80, 100]
y = [26.0, 48.6, 61.6, 71.2, 74.8, 75.2]
m = len(x)
n = m-1
xp = float(input('Masukkan Waktu : '))
yp = 0
for i in range(n+1):
    L = 1
    for j in range(n+1):
        if j != i:
            L *= (xp - x[j])/(x[i] - x[j])
    yp += y[i]*L
print('Untuk t = %.1f detik, T = %.1f Celcius' % (xp,yp))
```

Pada waktu 50 detik, temperatur-nya adalah:

```
Masukkan Waktu : 50
Untuk t = 50.0 detik, T = 66.9 Celcius
```

Gambar 3.3 menunjukkan perbedaan antara interpolasi linier dengan metode Lagrange dengan menggunakan suku banyak berderajat lima. Nampak, perbedaan antar keduanya tidak begitu terlihat ketika data tersedia, yakni pada selang waktu 20 - 60 detik (bandingkan dengan perbedaan pada detik ke-10).



Gambar 3.3: Perbandingan antara interpolasi linier dan metode Lagrange (suku banyak berderajat lima).

Pada contoh ini, kita menerapkan metode Lagrange pada kasus selang waktu yang seragam (*equally-spaced time interval*), namun metode ini juga dapat diterapkan pada kasus selang waktu yang tidak seragam. Hal ini sangat bermanfaat pada penelitian di bidang - bidang kelimuan yang memiliki sedikit data, seperti paleoklimatologi dan stratigrafi.

Metode Newton

Metode Newton bertujuan untuk menghasilkan suku banyak sebagai berikut, berdasarkan titik - titik data yang tersedia:

$$y(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-x_1) + \alpha_2(x-x_1)(x-x_2) + \cdots + \alpha_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \tag{3.9}$$

Terdapat dua langkah untuk mengubah data ke dalam bentuk tesebut. Langkah pertama dinamakan sebagai prosedur pembeda terbagi (*divided difference*), yang digunakan untuk menghitung nilai koefisien suku banyak

$\alpha_0, \cdots, \alpha_n$. Langkah kedua adalah substitusi sederhana pada nilai x yang diberikan ke suku banyak tersebut guna menghasilkan nilai y yang telah diinterpolasi.

Prosedur ini diterapkan untuk membuat suatu tabel yang tersusun atas data yang hendak diinterpolasi dan kolom berjumlah n yang mana merupakan pembeda. n dalam konteks ini merupakan derajat suku banyak dari titik - titik data yang berjumlah $n+1$. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Tabel 3.2 yang merepresentasikan prosedur pembeda untuk empat titik data.

(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
x_1	$y_1^{(1)} = y_1$			
x_2	$y_2^{(1)} = y_2$	$y_2^{(2)}$		
x_3	$y_3^{(1)} = y_3$	$y_3^{(2)}$	$y_3^{(3)}$	
x_4	$y_4^{(1)} = y_4$	$y_4^{(2)}$	$y_4^{(3)}$	$y_4^{(4)}$

Tabel 3.2: Contoh tabel prosedur pembeda terbagi.

Pada tabel tersebut, kolom (0) merupakan nilai x dari data dan kolom (1) merupakan nilai y dari data. Angka yang dituliskan di atas y merujuk pada nomor kolom-nya.

Kolom (2) merupakan perbedaan antara kolom kedua jika dibandingkan dengan nilai - nilai x berkorespondensi dengannya:

$$y_i^{(2)} = \frac{y_i^{(1)} - y_1^{(1)}}{x_i - x_1}, \quad \text{untuk } i = 2, 3, 4 \tag{3.10}$$

Pada kolom (3):

$$y_i^{(3)} = \frac{y_i^{(2)} - y_2^{(2)}}{x_i - x_2}, \quad \text{untuk } i = 3, 4 \tag{3.11}$$

Pada kolom (4) hanya terdapat nilai tunggal, yakni:

$$y_i^{(4)} = \frac{y_4^{(3)} - y_3^{(3)}}{x_4 - x_3} \tag{3.12}$$

Secara umum, prosedur pembeda terbagi ini dapat diformulasikan melalui persamaan sebagai berikut:

$$y_i^{(j+1)} = \frac{y_i^{(j)} - y_j^{(j)}}{x_i - x_j}, \quad \text{untuk } j = 1, \cdots, n, \quad \text{dan } i = j+1, \cdots, n+1 \tag{3.13}$$

Koefisien suku banyak pada persamaan 3.9 didapatkan dari nilai diagonal utama dari Tabel 3.2:

$$\alpha_0 = y_1^{(1)}, \alpha_1 = y_2^{(2)}, \cdots, \alpha_2 = y_3^{(3)}, \cdots, \alpha_n = y_{n+1}^{(n+1)} \tag{3.14}$$

Langkah kedua dari metode Newton ini adalah melakukan perhitungan nilai y berdasarkan nilai x dan koefisien suku banyak yang diberikan. Secara matematis, metode Newton ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{j=i} (x - x_j) \right) \alpha_i \tag{3.15}$$

Atau:

$$y(x) = y_1^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{j=i} (x - x_j) \right) y_{i+1}^{(i+1)} \tag{3.16}$$

Guna mendapatkan pemahaman yang lebih praktikal, kita akan mencoba menerapkan metode Newton ini ke dalam kode Python sebagai berikut:

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_032.py

Metode Newton

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/15/23
"""

import numpy as np

x = [0.0, 1.5, 2.8, 4.4, 6.1, 8.0]
y = [0.0, 0.9, 2.5, 6.6, 7.7, 8.0]
n = len(x) - 1
xp = float(input('Masukkan x : '))
Dy = np.zeros((n+1,n+1))
Dy[:,0] = y
for j in range(n):
    for i in range(j+1, n+1):
        Dy[i, j+1] = (Dy[i,j] - Dy[j,j])/(x[i] - x[j])

yp = Dy[0,0]
for i in range(n):
    xprod = 1
    for j in range(i+1):
```

```
        xprod *= xp - x[j]
    yp += xprod * Dy[i+1, i+1]
print('Untuk x = %.1f, y = %.1f' % (xp,yp))
```

Berikut adalah beberapa hasil nilai y untuk beberapa nilai x:

```
Masukkan x : 3.2
Untuk x = 3.2, y = 3.5

Masukkan x : 6.7
Untuk x = 6.7, y = 7.0

Masukkan x : 8.5
Untuk x = 8.5, y = 12.0
```

Pencocokan Kurva

Pencocokan kurva (*curve fitting*) merupakan prosedur untuk mencari persamaan yang dapat merangkum hubungan antar variabel pada data dengan meminimalkan deviasinya dari data tersebut. Jadi, perbedaan utama antara interpolasi dan pencocokan kurva adalah bahwa pencocokan kurva tidak harus melewati semua titik data yang diberikan. Teknik yang digunakan untuk mencari persamaan kurva dikenal sebagai metode kuadrat terkecil (*least square*), di mana selisih kuadrat antara titik-titik data dan nilai fungsi kurva diminimalkan.

Regresi Linier

Jika data dari suatu eksperimen mempunyai sifat linier, maka kita dapat melakukan pencocokan fungsi kurva-nya ke dalam garis lurus:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \tag{3.17}$$

Koefisien α_0 dan α_1 didapatkan melalui persamaan berikut ini:

$$\alpha_0 = \frac{\bar{y}\sum x_i^2 - \bar{x}\sum x_i y_i}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \tag{3.18a}$$

$$\alpha_1 = \frac{\sum x_i y_i - \bar{x}\sum y_i}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \tag{3.18b}$$

$\bar{x}$ dan $\bar{y}$ merupakan nilai rata - rata dari masing - masing x dan y:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3.19a}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{3.19b}$$

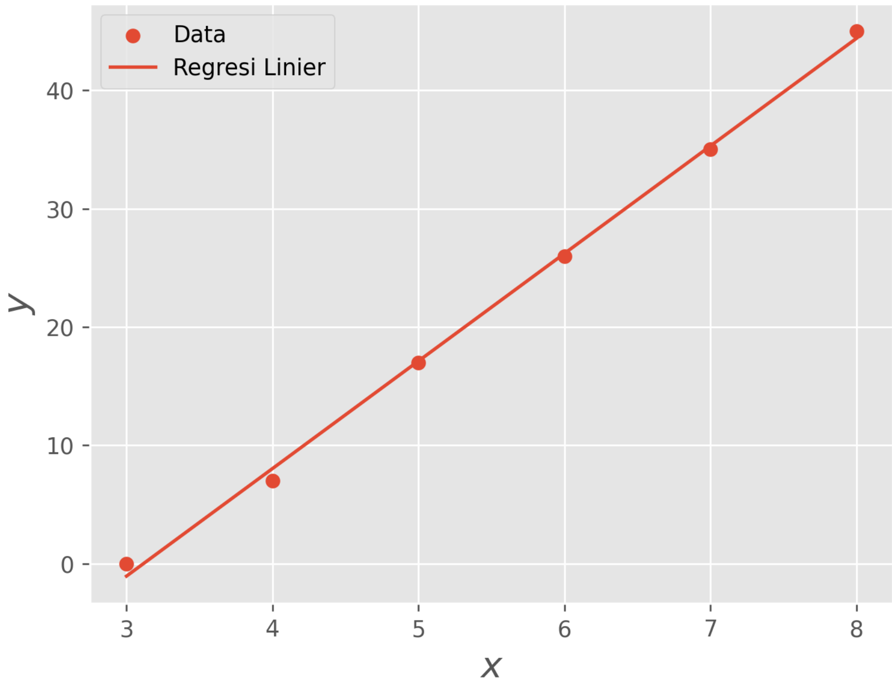
Untuk memahaminya secara lebih praktis, perhatikanlah contoh kode Python berikut ini:

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_033.py

Regresi Linier

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/17/23
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('ggplot')

# Data input
x = np.array([3, 4, 5, 6, 7, 8])
y = np.array([0, 7, 17, 26, 35, 45])

# Jumlah data
n = len(x)

# Menghitung koefisien regresi
alpha_0 = (np.mean(y) * np.sum(x**2) - np.mean(x) * np.sum(x*y))
    / (np.sum(x**2) - n * np.mean(x)**2)
alpha_1 = (np.sum(x*y) - np.mean(x) * np.sum(y)) / (np.sum(x**2)
    - n * np.mean(x)**2)

# Persamaan garis regresi linier
gar_reg = alpha_0 + alpha_1 * x

# Menampilkan persamaan garis regresi linier
print('Persamaan garis regresi linier: ')
print('f(x) = (%.3f) + (%.3f)x' % (alpha_0, alpha_1))

# Memplot titik data dan garis regresi linier
plt.scatter(x, y, label='Data')
plt.plot(x, gar_reg, label='Regresi Linier')
plt.xlabel('$x$', fontsize=16)
```

```
plt.ylabel('$y$', fontsize=16)
plt.legend()
plt.savefig('../gambar/gambar034.png', dpi=250)
```

Luarannya adalah sebagai berikut (Gambar 3.4):

```
Persamaan garis regresi linier:
f(x) = (-28.305) + (9.086)x
```



Gambar 3.4: Representasi grafis regresi linier.

Regresi Suku Banyak

Secara umum, suku banyak dapat didefinisikan secara matematis ke dalam bentuk sebagai berikut:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n \tag{3.20}$$

Jika suatu kumpulan data yang berisi m titik akan diestimasi oleh kurva suku banyak berderajat n, maka suatu sistem persamaan linear dirumuskan untuk menghitung nilai-nilai koefisien tersebut:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b} \tag{3.21}$$

, di mana:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \dots & \sum x_i^{2n} \end{pmatrix} \tag{3.22a}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n y_i \end{pmatrix} \tag{3.22b}$$

Notasi sigma dalam konteks ini didefinisikan sebagai operasi penjumlahan dari $i = 1$ hingga m:

$$\sum := \sum_{i=1}^{m} \tag{3.23}$$

Setelah semua koefisien dihitung, sistem persamaan ini dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik penyelesaian sistem linear seperti eliminasi Gauss. Kami menggunakan fungsi `solve()` dari modul `numpy.linalg` pada contoh ini. Modul ini berisi fungsi-fungsi aljabar linier.

Sebagai contoh, sistem suku banyak berderajat tiga akan didefinisikan melalui persamaan sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \sum x_i^6 \end{pmatrix} \tag{3.24a}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \sum x_i^3 y_i \end{pmatrix} \tag{3.24b}$$

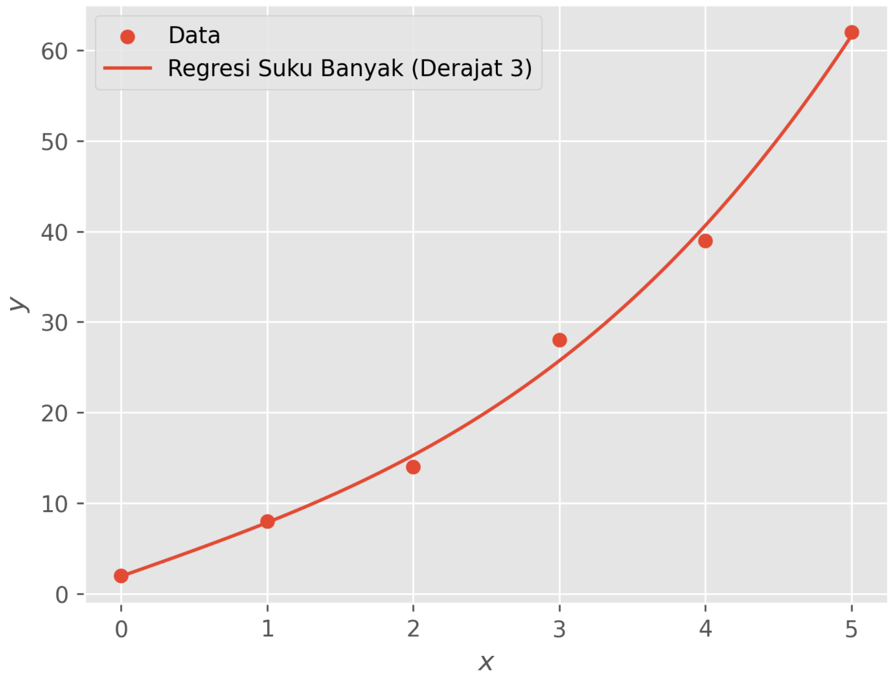
Berikut adalah implementasinya di Python:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_034.py

```

```
Regresi Suku Banyak

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/17/23
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("ggplot")

# Data
x = np.arange(6)
y = np.array([2, 8, 14, 28, 39, 62], float)

# Regresi polinomial
m = len(x)
n = 3
A = np.zeros((n+1, n+1))
B = np.zeros(n+1)

for baris in range(n+1):
    for kolom in range(n+1):
        if baris == 0 and kolom == 0:
            A[baris, kolom] = m
            continue
        A[baris, kolom] = np.sum(x**(baris+kolom))
    B[baris] = np.sum(x**baris * y)

a = np.linalg.solve(A, B)

# Tampilkan persamaan regresi
print ('Suku Banyak:')
print('f(x) = \t %f '%a[0])
for i in range(1, n+1):
    print('\t %+f x^%d' % (a[i],i))

# Plot data dan hasil regresi
plt.scatter(x, y, label='Data')
x_reg = np.linspace(min(x), max(x), 100)
y_reg = sum(a[i] * x_reg**i for i in range(n+1))
plt.plot(x_reg, y_reg, label='Regresi Suku Banyak (Derajat %d)' %n)
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$y$')
plt.legend()
plt.savefig('../gambar/gambar035.png', dpi=250)
```

Luarannya dapat dilihat sebagai berikut ini (Gambar 3.5):

```
Suku Banyak:
f(x) =   1.928571
+5.678571 x^1
-0.000000 x^2
+0.250000 x^3
```



Gambar 3.5: Representasi grafis regresi suku banyak berderajat tiga.

Interpolasi Menggunakan SciPy

Terdapat berbagai fungsi interpolasi, baik satu mupun multidimensi, pada modul `scipy.interpolate`. Pada bagian ini, kami hanya membahas penggunaan fungsi interpolasi `interp1d()` dan `lagrange()` untuk diaplikasikan pada data di Tabel 3.1 dengan menggunakan Python Shell:

```
>>> from scipy.interpolate import interp1d, lagrange
>>> x = [0, 20, 40, 60, 80, 100]
>>> y = [26.0, 48.6, 61.6, 71.2, 74.8, 75.2]
>>> f = interp1d(x,y) # fungsi interpolasi
```

```
>>> print(f(20)) # x = 20
48.6
>>> print(f(80)) # x = 80
74.8
>>> print(f(50)) # x = 50
66.4
>>> f = interp1d(x,y,'quadratic') # interpolasi kuadratik
>>> print(f(50)) # x = 50
66.95208333333333
>>> f = interp1d(x,y,'cubic') # interpolasi kubik
>>> print(f(50)) # x = 50
66.945
```

Hasil dari interpolasi kubik ini mempunyai kemiripan dengan interpolasi dengan metode Lagrange untuk suku banyak berderajat lima:

```
>>> L = lagrange(x, y) # polinomial Lagrange
>>> print(L)
            5             4             3           2
3.698e-08 x - 9.688e-06 x + 0.0009219 x - 0.04463 x + 1.725 x + 26
>>> print(L(50))
66.94765624999957
```

Untuk dapat lebih memahami terkait modul ini, kalian dapat berkunjung pada situs ini: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/interpolate.html#module-scipy.interpolate.

Pencocokan Kurva Menggunakan SciPy

Kita dapat menggunakan fungsi `lineregress()` pada modul `scipy.stats` untuk menyelesaikan permasalahan regresi linier. Berikut adalah implementasinya di Python Shell:

```
>>> from scipy.stats import linregress
>>> x = [3, 4, 5, 6, 7, 8]
>>> y = [0, 7, 17, 26, 35, 45]
>>> L = linregress(x,y)
>>> L.slope
9.085714285714285
>>> L.intercept
-28.3047619047619
```

Untuk informasi lebih lanjut terkait dengan fungsi ini, kalian dapat berkunjung ke dokumentasi resmi-nya: `https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.linregress.html#scipy.stats.linregress`.

Sementara itu, untuk mengimplementasikan regresi suku banyak pada SciPy, kita dapat menggunakan fungsi `curve_fit()` pada modul `scipy.optimize`. Modul ini menggunakan metode kuadrat terkecil yang bersifat non-linier untuk mencocokan data dengan fungsi. Berikut adalah contohnya di Python Shell:

```
>>> from scipy.optimize import curve_fit
>>> f = lambda x, a0, a1, a2: a0 + a1*x + a2*x**2 # fungsi kuadrat
>>> x = [0, 1, 2, 3, 4, 5]
>>> y = [2, 8, 14, 28, 39, 62]
>>> a, b = curve_fit(f, x, y)
>>> print(a) # tampilkan koefisien
[2.67857143 2.25357143 1.875     ]
```

Variabel `b` merupakan *array* 2D yang merupakan estimasi kovarian dari koefisien regresi `a`. Kita juga dapat mengimplementasikan regresi kubik sebagai berikut ini:

```
>>> f = lambda x, a0, a1, a2, a3: a0 + a1*x + a2*x**2 + a3*x**3
>>> a,_ = curve_fit(f, x, y)
>>> print(a)
[ 1.92857143e+00  5.67857143e+00 -2.17847962e-12  2.50000000e-01]
```

Pada contoh ini, kita menempatkan variabel `b` pada *placeholder* `_` karena tidak membutuhkan estimasi kovarian tersebut. Untuk memahami secara lebih mendetail tentang fungsi `curve_fit()`, kalian dapat berkunjung ke situs ini: `https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve_fit.html`.

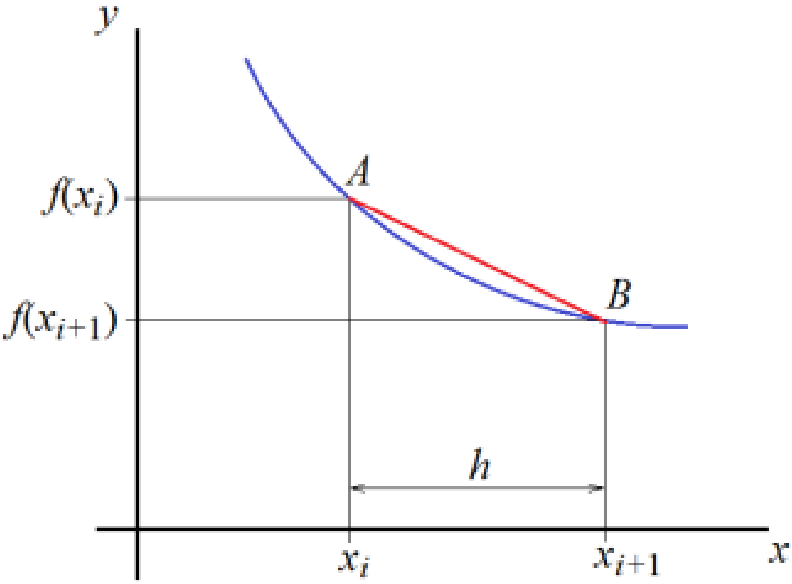
4

Turunan Numerik

Turunan mempunyai banyak berguna di dalam bidang sains dan teknik karena sebagian besar hubungan antar variabel di dalam persamaan - persamaan fisis, serta data observasi umumnya mencakup perubahan variabel tersebut terhadap posisi dan/atau waktu. Meskipun sebagian besar persamaan - persamaan tesebut dapat diturunkan secara analitis, terdapat banyak kurva dan kumpulan data yang diperoleh dari hasil observasi, sehingga turunannya, mau tidak mau, harus diselesaikan secara numerik untuk memperoleh analisis yang akurat.

Pendekatan Beda Hingga

Pendekatan beda hingga digunakan untuk mengaproksimasi turunan dari suatu persamaan atau data dengan mengambil perbedaan nilai $y(x)$ terhadap perbedaan x. Dalam kasus perbedaan x yang sama, perbedaan Δx umumnya dinamakan sebagai h, yang dikenal sebagai *step size*, seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 4.1.



Gambar 4.1: Representasi grafis pendekatan beda hingga.

Bentuk aproksimasi beda hingga yang paling sederhana adalah dengan menemukan kemiringan garis AB yang mana dapat dianggap setara dengan kemiringan kurva antara titik x_i dan x_{i+1}. Semakin kecil *step size* yang kita gunakan, akan semakin akurat pula aproksimasi kemiringan kurva yang kita dapatkan. Urutan nilai kemiringan ini akan menghasilkan aproksimasi turunan pertama dari data yang diberikan.

Secara teoritis, pendekatan beda hingga berasal dari ekspansi deret Taylor dari $f(x)$, yang mana telah kita pelajari semenjak tingkat 1 perkuliah di mata kuliah Kalkulus 1. Ekspansi dari $f(x_{i+1})$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \ldots \tag{4.1}$$

Sehingga $f'(x_i)$ dapat dituliskan ke dalam bentuk:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2!}h - \frac{f'''(x_i)}{3!}h^2 + \ldots \tag{4.2}$$

Dengan menghilangkan suku - suku yang mengandung turunan kedua dan yang lebih tinggi, $f'(x_i)$ dapat dituliskan sebagai:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{4.3}$$

Persamaan 4.3 dikenal sebagai metoode beda maju (*forward difference*). Hal ini dikarenakan titik kedua yang terpilih sesudah x_i berada pada arah sumbu x positif. Suku $\mathcal{O}(h)$ dikenal sebagai galat yang timbul sebagai akibat pemotongan suku - suku deret Taylor yang dilbatkan.

Berikut adalah beberapa aproksimasi turunan dengan metode beda maju, tengah, dan mundur hingga turunan keempat-nya:

- Metode beda maju dengan galat $\mathcal{O}(h)$:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \tag{4.4a}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} \tag{4.4b}$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3} \tag{4.4c}$$

$$f''''(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4} \tag{4.4d}$$

- Metode beda tengah (*central difference*) dengan galat $\mathcal{O}(h^2)$:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} \tag{4.5a}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} \tag{4.5b}$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3} \tag{4.5c}$$

$$f''''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4} \tag{4.5d}$$

- Metode beda mundur (*backward difference*) dengan galat $\mathcal{O}(h)$:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \tag{4.6a}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} \tag{4.6b}$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3} \tag{4.6c}$$

$$f''''(x_i) = \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h} \tag{4.6d}$$

Seperti yang dapat diperhatikan dari persamaan - persamaan tersebut, metode beda tengah mempertimbangkan jumlah titik yang sama di sebelah kiri dan kanan dari x_i, sedangkan pada metode beda mundur titik - titik diambil dari sebelah kiri x_i. Hal ini dapat mempengaruhi hasil secara signifikan.

Guna memperoleh pemahaman praktikal tentang metode - metode ini, maka kita akan menerapkannya untuk memperoleh turunan pada suku banyak berikut ini pada titik $x = 0.1$:

$$f(x) = 0.1x^5 - 0.2x^3 + 0.1x - 0.2 \tag{4.7}$$

Kita dapat memperoleh solusi analitis-nya adalah sebagai berikut:

$$f'(x) = 0.5x^4 - 0.6x^2 + 0.1 \tag{4.8a}$$

$$f''(x) = 2.0x^3 - 1.2x \tag{4.8b}$$

Dengan mensubstitusikan nilai $x = 0.1$, maka kita mendapatkan $f'(0.1) = 0.09405$ dan $f"(0.1) = -0.118$.

Berikut ini adalah implementasi numerik-nya di Python:

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_041.py

Metode Beda Hingga

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/17/23
"""

f = lambda x:0.1*x**5 - 0.2*x**3 + 0.1*x - 0.2
h = 0.05
x = 0.1

# Beda Maju
```

```
dff1 = (f(x+h) - f(x))/h
dff2 = (f(x+2*h) - 2*f(x+h) + f(x))/h**2
print('Solusi dari beda maju:')
print('f\'(%f) = %f'%(x,dff1))
print('f\'\'(%f) = %f'%(x,dff2))

# Beda Tengah
dfc1 = (f(x+h)-f(x-h))/(2*h)
dfc2 = (f(x+h)-2*f(x)+f(x-h))/h**2
print('\nSolusi dari beda tengah:')
print('f\'(%f) = %f'%(x,dfc1))
print('f\'\'(%f) = %f'%(x,dfc2))

# Beda Mundur
dfb1 = (f(x)-f(x-h))/h
dfb2 = (f(x)-2*f(x-h)+f(x-2*h))/h**2
print('\nSolusi dari beda mundur:')
print('f\'(%f) = %f'%(x,dfb1))
print('f\'\'(%f) = %f'%(x,dfb2))
```

Hasil-nya adalah:

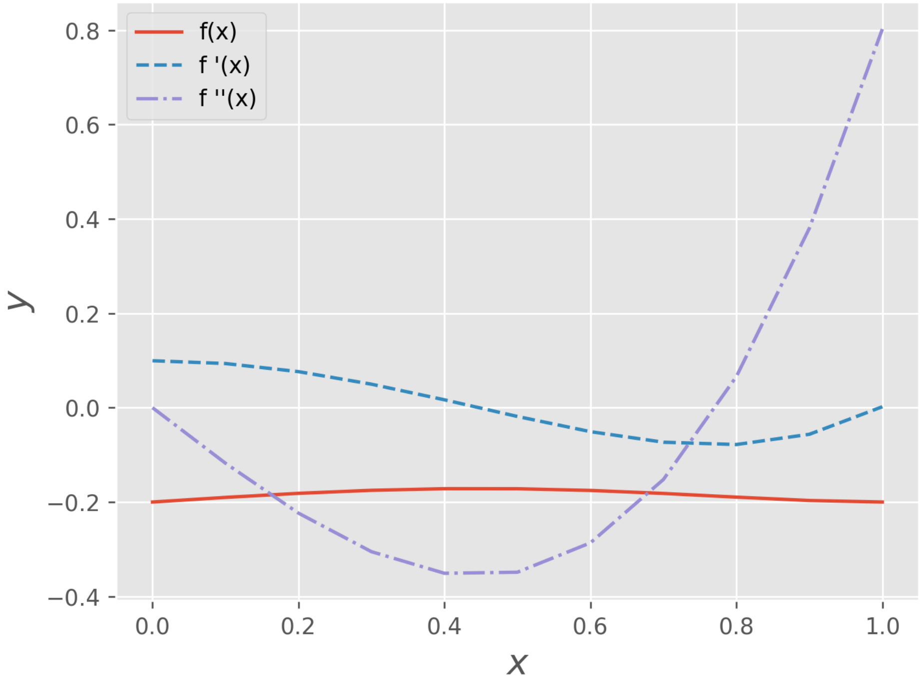
```
Solusi dari beda maju:
f'(0.100000) = 0.090632
f''(0.100000) = -0.172875

Solusi dari beda tengah:
f'(0.100000) = 0.093576
f''(0.100000) = -0.117750

Solusi dari beda mundur:
f'(0.100000) = 0.096519
f''(0.100000) = -0.059625
```

Dengan membandingkan nilai yang diperoleh dari solusi analitis, kita perhatikan bahwa metode beda tengah memberikan solusi paling akurat pada turunan pertama (galat 0,5%), sementara metode beda maju dan mundur kurang akurat (masing - masing galat-nya 3,6% dan 2,6%). Kesimpulan serupa dapat diambil untuk turunan kedua juga.

Beriku adalah kode Python yang dapat kita terapkan untuk mengilustrasikan turunan pertama dan kedua dengan menggunakan beda tengah:

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_042.py
```

```python

Metode Beda Tengah

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/17/23
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('ggplot')

f = lambda x:0.1*x**5 - 0.2*x**3 + 0.1*x - 0.2
h = 0.05
x = np.linspace(0,1,11)

# Beda tengah
dfc1 = (f(x+h) - f(x-h))/(2*h)
dfc2 = (f(x+h) - 2*f(x) + f(x-h)) / h**2

# Plotting
plt.plot(x,f(x),'-', x,dfc1,'--', x,dfc2,'-.')
plt.xlabel('$x$', fontsize=16)
plt.ylabel('$y$', fontsize=16)
plt.legend(['f(x)','f \'(x)','f \'\'(x)'])
plt.savefig('../gambar/gambar042.png', dpi=250)
```



Gambar 4.2: Representasi grafis turunan numerik menggunakan metode beda tengah pada domain [0, 1].

Ketika fungsi $f(x)$ diterjemahkan ke dalam kode Python, kenaikan nilai x tidak selalu sama dengan *step size* turunan. Pada kode Python di atas, nilai-nilai x berkisar dari 0 hingga 1 dengan kenaikan 0,1, sementara *step size* h adalah 0,05 (Gambar 4.2). Kenaikan x menentukan jumlah titik di mana turunan dikalkulasikan, sementara ukuran langkah memengaruhi akurasi turunan di setiap titik.

Bandingkan dengan fungsi $f(x)$, jika kita diberikan suatu himpunan data dalam bentuk titik (x, y), interpolasi atau pencocokan kurva dapat diterapkan untuk menghasilkan suku banyak yang sesuai dengan titik - titik yang diberikan. Selanjutnya, suku banyak yang dihasilkan dapat dihitung turunannya secara analitis atau numerik untuk mendapatkan turunan yang diperlukan.

Turunan Numerik Menggunakan SciPy

Fungsi turunan numerik `derivative()` dari modul `scipy.misc` dapat digunakan untuk menghitung turunan ke-`n` dari suatu fungsi pada `x0` dengan menggunakan metode beda tengah dengan *step size* `dx`. Berikut adalah penerapannya di Python Shell:

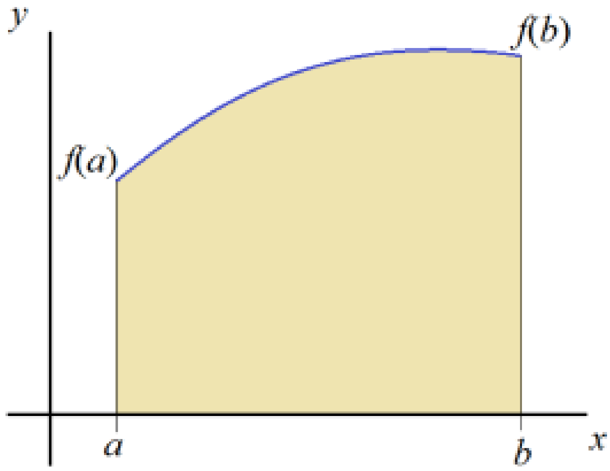
```
>>> from scipy.misc import derivative
>>> f = lambda x: 0.1*x**5 - 0.2*x**3 + 0.1*x - 0.2
>>> y = derivative(f, 0.1, 0.05) # x0=0.1, dx=0.05, n=1 (default)
>>> print(y)
0.093575625
>>> y2 = derivative(f, 0.1, 0.05,2) # n=2 untuk turunan kedua
>>> print(y2)
-0.11774999999999422
```

Hasil ini sama dengan apa yang kita peroleh ketika menghitungnya dengan metode beda tengah secara manual sebelumnya. Untuk mengetahui lebih jauh tentang modul ini, kalian dapat berkunjung ke situs ini: `https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.misc.derivative.html`.

5

Integrasi Numerik

Ide utama dari operasi integral tertentu adalah untuk menghitung luasan wilayah di bawah kurva antara dua nilai a dan b (Gambar 5.1) dengan menggunakan berbagai metode integrasi yang telah kita pelajari di Kalkulus 1 dan 2, guna memperoleh hasil analitik-nya.



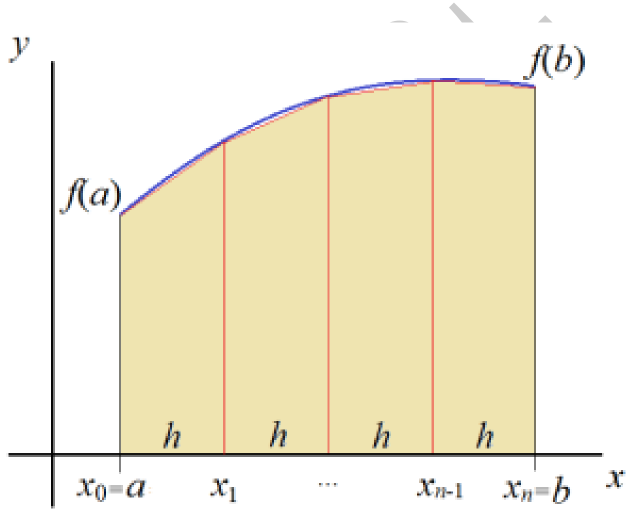
Gambar 5.1: Representasi grafis integral tertentu.

Integrasi numerik bertujuan untuk menghitung luas di bawah kurva suatu fungsi dengan membagi luasan ke dalam wilayah - wilayah diskrit, di mana luas setiap wilayah tersebut dapat dihitung dengan menggunakan kaidah matematika sederhana. Selanjutnya, luas seluruh wilayah tersebut dijumlahkan untuk mendapatkan total luas di bawah kurva dari a hingga b (Gambar 5.1).

Metode integrasi numerik dapat berguna untuk kasus di mana tidak terdapat solusi integral eksplisit dari suatu persamaan, atau jika integrasi tersebut dilakukan berdasarkan data empirik. Akurasi dari metode integrasi numerik sangat bergantung pada jumlah wilayah - wilayah diskrit yang menutupi area di bawah kurva dengan presisi. Metode ini lebih efisien ketika menghasilkan hasil yang akurat dengan pembagian wilayah yang lebih sedikit.

Kaidah Trapesium

Kaidah trapesium adalah metode integrasi numerik yang paling dasar. Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.2, luasan di bawah kurva dibagi ke dalam beberapa trapesium vertikal dengan lebar yang sama, h yang mana titik - titik atas-nya bersinggungan dengan kurva.



Gambar 5.2: Representasi grafis kaidah trapesium.

Luas trapesium pertama dihitung dengan persamaan berikut ini:

$$A = h\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \tag{5.1}$$

Integral-nya merupakan jumlah dari seluruh trapesium:

$$I = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]+\frac{h}{2}[f(x_1)+f(x_2)]+\ldots+\frac{h}{2}[f(x_{n-2})+f(x_{n-1})]+\frac{h}{2}[f(x_{n-1})+f(x_n)] \tag{5.2a}$$

$$I = h\left\{\frac{1}{2}[f(x_0) + f(x_n)] + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})\right\} \tag{5.2b}$$

$$I = h\left\{\frac{1}{2}[f(x_a) + f(x_b)] + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})\right\} \tag{5.2c}$$

Kaidah ini dapat diimplementasikan dengan mudah menggunakan struktur pengulangan tunggal karena h yang bersifat konstan. Notasi x_i dapat dimplementasikan sebagai `x1` $\longrightarrow$ `a + h`, `x2` $\longrightarrow$ `a + 2h`, dan seterusnya.

Pada bagian ini kita akan mencoba menyelesaikan integral berikut ini untuk diimplementasikan menggunakan kaidah trapesium:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x)\, dx \tag{5.3}$$

Secara analitik, kita dapat menyelesaikan integral ini dengan metode integrasi parsial yang telah kita pelajari semenjak di bangku SMA:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \tag{5.4}$$

Di sini, kita pilih u dan dv sedemikian rupa sehingga du dan v mudah dihitung. Maka, kita tetapkan $u = x$ dan $dv = \sin(x)\, dx$. Kemudian, kita dapat mencari du dan v:

$$du = dx \tag{5.5a}$$

$$v = -\cos(x) \tag{5.5b}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan-nya ke persamaan 5.4, kita mendapatkan:

$$\int x \sin(x)\, dx = -x\cos(x) - \int (-\cos(x))\, dx \tag{5.6}$$

Selanjutnya, integrasikan suku yang tersisa:

$$\int x \sin(x)\, dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\, dx \tag{5.7}$$

Integral dari $\cos(x)$ adalah $\sin(x)$, sehingga kita dapatkan:

$$\int x \sin(x)\, dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C \tag{5.8}$$

Kemudian, kita mengevaluasi ekspresi ini dari 0 hingga $\frac{\pi}{2}$, di mana C adalah konstanta integrasi:

$$\left[-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - [0\cos(0) + \sin(0)] \tag{5.9}$$

Kemudian, kita sederhanakan ekspresi ini:

$$-\frac{\pi}{2}(0) + 1 - (0 + 0) = 1 \tag{5.10}$$

Sehingga, secara analitik nilai integral-nya adalah 1.

Berikut ini adalah implementasi numerik-nya dengan menggunakan kaidah trapesium:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_051.py

Kaidah Trapesium

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/17/23
"""

from math import sin, pi
f = lambda x: x*sin(x)
a = 0
b = pi/2
n = 5
h = (b - a) / n
S = 0.5*(f(a)+f(b))
for i in range(1,n):
    S += f(a + i*h)
Integral = h * S
print('Integral = %f' % Integral)
```

Berikut adalah hasil-nya:

```
Integral = 1.008265
```

Dengan mereduksi pembagi `n=10`, kita akan mendapatkan aproksimasi yang lebih akurat:

```
Integral = 1.002059
```

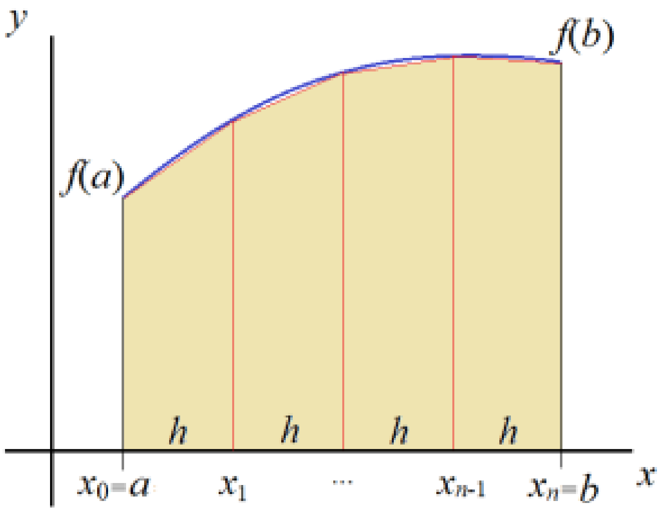
Jika `n=100`:

```
Integral = 1.000021
```

Dengan hanya menggunakan kaidah trapesium yang sangat sederhana, dengan $n = 100$, kita dapatkan akurasi hingga empat digit desimal (luar biasa, bukan?!).

Kaidah Simpson

Kaidah Simpson menggunakan faktor pembobotan untuk mengaproksimasi integral guna meningkatkan akurasi dengan jumlah pembagian wilayah diskritisasi yang lebih sedikit (Gambar 5.3). Berbeda dengan kaidah trapesium yang hanya mempertimbangkan dua titik, x_i dan x_{i+1}, untuk menghitung luas trapesium, kaidah Simpson menggunakan lebih dari dua titik, yakni, dengan mempertimbangkan beberapa *strip*, pada setiap iterasinya. Nilai-nilai $f(x)$ pada titik - titik tersebut disesuaikan dengan faktor pembobotan untuk meminimalkan kesalahan.



Gambar 5.3: Representasi grafis kaidah Simpson.

Kaidah Simpson 1/3

Metode ini bertujuan untuk menghitung luas dua *strip* sekaligus, sehingga, tiga nilai x diperhitungkan pada setiap iterasi. Untuk menutupi seluruh domain dengan tepat, jumlah *strip*, n, haruslah genap.

Berikut adalah perhitungan luas dua *strip* pertama:

$$A = \frac{1}{3}h\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] \tag{5.11}$$

Penjumlahan dari seluruh pasang *strip*:

$$
\begin{aligned}
I =& \frac{1}{3}h[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \\
&+ \frac{1}{3}h[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \ldots \\
&+ \frac{1}{3}h[f(x_{n-4}) + 4f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})] \\
&+ \frac{1}{3}h[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Persamaan 5.12 dapat dituliskan ulang menjadi:

$$
\begin{aligned}
I = \frac{1}{3}h\Big[& f(x_0) + f(x_n) \\
& + 4(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-3}) + f(x_{n-1})) \\
& + 2(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-4}) + f(x_{n-2}))\Big]
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Dan secara lebih ringkas untuk kepentingan pemrograman menjadi:

$$
I = \frac{1}{3}h\left[f(a) + f(b) + \sum_{i=1,3,5}^{n-1} 4f(x_i) + \sum_{i=2,4,6}^{n-2} 2f(x_i)\right] \tag{5.14}
$$

Berikut adalah implementasi kaidah Simpson 1/3 di Python untuk persamaan 5.3:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_052.py

Kaidah Simpson 1/3

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/17/23
"""

from math import sin, pi
f = lambda x: x*sin(x)
a = 0
b = pi/2
n = 6
h = (b - a) / n
S = f(a)+f(b)
for i in range(1,n,2):
    S += 4*f(a + i*h)
for i in range(2,n,2):
```

```
    S += 2*f(a + i*h)
Integral = h/3 * S
print('Integral = %f' % Integral)
```

Hasilnya adalah:

```
Integral = 0.999921
```

Jika `n=10`:

```
Integral = 0.999990
```

Jika `n=22`:

```
Integral = 1.000000
```

Kaidah Simpson 3/8

Kaidah ini mirip dengan kaidah Simpson 1/3 yang telah kita pelajari. Satu - satu-nya perbedaan adalah dengan diikutsertakannya tiga *strip* pada setiap perhitungan luas. Dengan demikian, empat titik harus dilibatkan pada setiap perhitungan. Berikut ini adalah persamaan yang dapat digunakan guna menghitung luasan tiga *strip* pertama:

$$A = \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \tag{5.15}$$

Dengan demikian, jumlah semua pasangan *strip* akan menjadi:

$$\begin{aligned} I = &\frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \\ &+ \frac{3}{8}h[f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)] + \dots \\ &+ \frac{3}{8}h[f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + f(x_n)] \end{aligned} \tag{5.16}$$

Berikut adalah persamaan yang dapat kita gunakan untuk kebutuhan pemrograman:

$$I = \frac{3}{8}h\left\{[f(a) + f(b)] + \sum_{i=1,4,7}^{n-2} 3[f(x_i) + f(x_{i+1})] + \sum_{i=3,6,9}^{n-3} 2f(x_i)\right\} \tag{5.17}$$

Jumlah *strip*, `n`, harus merupakan kelipatan dari tiga. Berikut adalah penerapan-nya secara numerik di Python untuk persamaan 5.3:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_053.py

Kaidah Simpson 3/8

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/17/23
"""

from math import sin, pi
f = lambda x: x*sin(x)

a = 0
b = pi/2
n = 6
h = (b - a) / n
S = (f(a) + f(b))

for i in range(1, n, 3):
    S += 3*(f(a + i*h) + f(a + (i+1)*h))

for i in range(3, n, 3):
    S += 2*f(a + i*h)

Integral = 3*h/8 * S
print('Integral = %f' % Integral)
```

Hasilnya adalah:

```
Integral = 0.999819
```

Pada `n=12`:

```
Integral = 0.999989
```

Pada `n=21`:

```
Integral = 1.000000
```

Integrasi Ganda

Integrasi ganda dapat diselesaikan secara numerik dengan pengulangan bersarang pada setiap variabel-nya mulai dari batas bawah hingga batas atas integral. Terdapat tiga tahapan modifikasi jika kita hendak menerapkan kaidah Simpson untuk penyelesaian integral ganda:

- Pengembangan struktur pengulangan untuk mengakomodasi integrasi ganda. Kaidah Simpson 1/3 dihitung dengan menggunakan modifikasi algoritma sebagai berikut:

$$I = \frac{1}{3}h[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\ldots+2f_{n-4}+4f_{n-3}+2f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n] \tag{5.18}$$

, dan untuk kaidah Simpson 3/8:

$$I = \frac{3}{8}h[f_0+3f_1+3f_2+2f_3+3f_4+\ldots+3f_{n-4}+2f_{n-3}+3f_{n-2}+3f_{n-1}+f_n] \tag{5.19}$$

, di mana $f := f(x, y)$. Perlu diperhatikan, bahwa pada operasi ini setiap faktor untuk suku integrasi pertama harus dikalikan dengan setiap faktor pada suku integrasi kedua, begitu pun sebaliknya.

- Jumlah pembagian yang diterapkan pada kaidah Simpson 1/3 harus berjumlah genap, sedangkan pada kaidah 3/8 harus kelipatan dari tiga. Setiap langkah integrasi juga mempunyai *step size* yang berbeda.

- Penjumlahan akhirnya harus dikalikan dengan faktor yang serupa. Pada kaidah Simpson 1/3:

$$\frac{h_x}{3}\frac{h_y}{3} = \frac{h_x h_y}{9} \tag{5.20}$$

Pada kaidah Simpson 3/8:

$$\frac{3h_x}{8}\frac{3h_y}{8} = \frac{9h_x h_y}{16} \tag{5.21}$$

Kita akan mencoba menyelesaikan persamaan berikut ini sebagai contoh untuk penghitungan integrasi ganda:

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}\left(x^2y + xy^2\right)\,dx\,dy \tag{5.22}$$

Mari kita coba selesaikan persamaan 5.22 secara analitik. Langkah pertama adalah melakukan integrasi terhadap x:

$$\int_{1}^{2}(x^2y + xy^2)\,dx \tag{5.23}$$

Kemudian kita mengevaluasi batas bawah dan batas atas x tersebut:

$$\left[\frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2\right]_1^2 \tag{5.24}$$

Sehingga didapatkan:

$$\frac{7}{3}y + \frac{3}{2}y^2 \tag{5.25}$$

Kemudian, kita integrasikan terhadap y dari -1 hingga 1:

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{7}{3}y + \frac{3}{2}y^2\right)\,dy \tag{5.26}$$

Kemudian dilakukan evaluasi pada batas bawah dan batas atas y tersebut:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{7}{6}y^2 + \frac{1}{2}y^3\right)_{-1}^{1} \\ \left(\frac{7}{6}(1^2) + \frac{1}{2}(1^3)\right) - &\left(\frac{7}{6}(-1)^2 + \frac{1}{2}(-1)^3\right) \\ &\left(\frac{7}{6} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{7}{6} - \frac{1}{2}\right) \\ &\frac{7}{6} + \frac{1}{2} - \frac{7}{6} + \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{5.27}$$

Sehingga, didapatkan hasil akhir:

$$\frac{2}{2} = 1 \tag{5.28}$$

Berikut ini penerapan-nya secara numerik di Python:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_054.py

Integrasi Ganda

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/18/23
"""

f = lambda x, y: x**2 * y + x * y**2 # pendefinisian fungsi

ax = 1 # batas bawah x
bx = 2 # batas atas x
ay = -1 # batas bawah y
```

```python
by = 1 # batas atas y
nx = 10 # jumlah pembagi di domain x
ny = 10 # jumlah pembagi di domain y
hx = (bx - ax)/nx # step size x
hy = (by - ay)/ny # step size y

S = 0 # inisiasi penjumlahan
for i in range(0, ny+1): # pengulangan integral luar
    if i == 0 or i == ny:
        p = 1 # faktor dari suku pertama & terakhir
    elif i % 2 == 1:
        p = 4 # faktor dari suku - suku yg dikalikan 4
    else:
        p = 2 # faktor dari suku suku yg dikalikan 2
    for j in range(0, nx+1): # pengulangan integral dalam
        if j == 0 or j == nx:
            q = 1 # faktor dari suku pertama & terakhir
        elif j % 2 == 1:
            q = 4 # faktor dari suku - suku yg dikalikan 4
        else:
            q = 2 # faktor dari suku suku yg dikalikan 2
        S += p*q * f(ax + j*hx, ay + i*hy)
Integral = hx*hy/9 * S
print('Integral = %f' %Integral)
```

Hasilnya adalah:

```
Integral = 1.000000
```

Integrasi Numerik Menggunakan SciPy

Integrasi numerik berada pada modul `scipy.integrate`. Modul ini memuat berbagai macam fungsi integrasi numerik seperti `quad()`, `dblquad()`, dan `nquad()`. Berikut ini beberapa contoh penerapannya pada persamaan 5.3 dan 5.23 di Python Shell:

```
>>> import numpy as np
>>> from scipy.integrate import quad, dblquad, nquad
>>> f = lambda x : x*np.sin(x)
>>> print(quad(f, 0, np.pi/2))
(1.0, 1.1102230246251565e-14)
```

Fungsi ini menghasilkan *tuple* yang terdiri dari aproksimasi integral dan estimasi galat absolut. Jika kita hanya menginginkan aproksimasi integralnya saja, maka kita dapat menjalankan perintah:

```
>>> I, _ = quad(f, 0, np.pi/2)
>>> print(I)
1.0
```

Untuk mengaproksimasi integrasi ganda kita dapat menggunakan fungsi `dblquad()`, yang mana akan menghasilkan *tuple* dengan nilai pertama merupakan aproksimasi integral dan nilai kedua berupa estimasi galat absolut:

```
>>> fn = lambda x, y : x**2*y + x*y**2
>>> ax=1; bx=2; ay=-1; by=1
>>> print(dblquad(fn, ax, bx, lambda y:ay, lambda y:by))
(0.9999999999999999, 4.414734146837848e-14)
```

Sementara itu, untuk aproksimasi integral lipat n, kita dapat menggunakan fungsi `nquad()`, yang mana hasil akhirnya juga berupa *tuple* yang sama dengan kedua fungsi sebelumnya. Berikut ini contoh penggunaannya untuk menyelesaikan integrasi ganda pada persamaan 5.23:

```
>>> print(nquad(fn, [[ax, bx], [ay, by]]))
(1.0, 4.230171575788777e-14)
```

Integrasi Monte Carlo

Metode - metode numerik untuk menyelesaikan integral yang telah kita pelajari sejauh ini merupakan metode perhitungan berbasis grid. Meskipun hal ini efektif untuk mengaproksimasi integral sederhana berdimensi tunggal, metode ini sulit diterapkan untuk aproksimasi numerik integral rumit dalam beberapa dimensi. Untuk mengatasi hal tersebut, kita dapat menggunakan algoritma integrasi Monte Carlo (MC). Ide utama dari metode ini adalah aproksimasi luasan wilayah di bawah kurva fungsi yang hendak diintegrasikan dengan menggunakan titik acak.

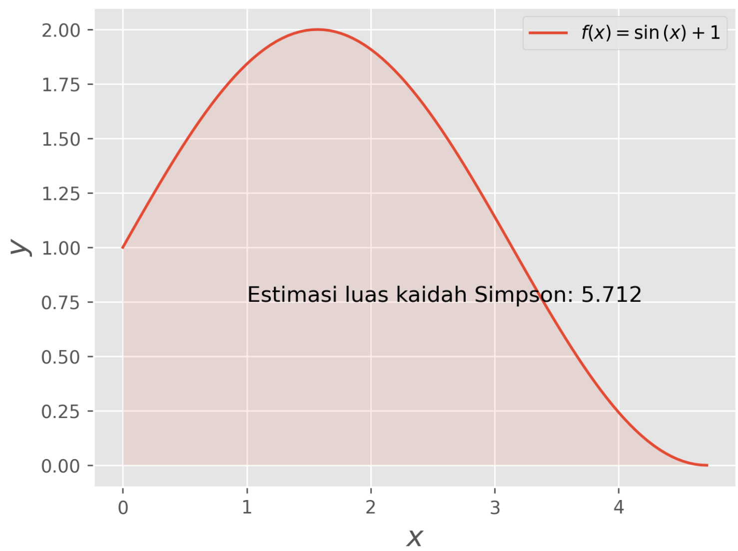
Guna memberikan ilustrasi awal, kita akan mencoba menyelesaikan integral berikut secara numerik menggunakan kaidah Simpson:

$$\int_0^{1,5\pi} \sin(x) + 1\, dx \tag{5.29}$$

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_055.py

Estimasi kaidah Simpson
```

```

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/20/23
"""

import numpy as np
from scipy.integrate import simps
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("ggplot")

f = lambda x:np.sin(x) + 1

xs = np.linspace(0, 1.5 * np.pi, 100)
ys = f(xs)
luas = simps(ys, x=xs)

plt.plot(xs, ys, label=r"$f(x) = \sin{(x)} + 1$")
plt.fill_between(xs, 0, ys, alpha=0.1)
plt.text(1, 0.75, f"Estimasi luas kaidah Simpson: {luas:0.3f}",
    fontsize=12)

plt.ylabel("$y$", fontsize=16)
plt.xlabel("$x$", fontsize=16)
plt.legend()
plt.savefig("../gambar/gambar054.png", dpi=250)
```

Hasilnya, diketahui jika luas wilayah di bawah kurva sebesar 5,712 (Gambar 5.4).

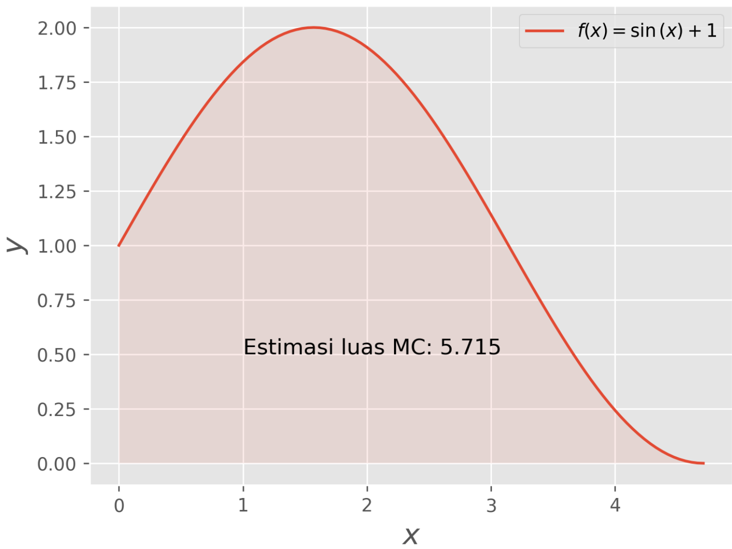


Gambar 5.4: Estimasi luas kurva $\sin(x) + 1$ menggunakan kaidah Simpson.

Berikut merupakan cara mengestimasikannya dengan metode MC. Nampak bahwa hasil yang kita dapatkan tidaklah berbeda jauh (Gambar 5.5).

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_056.py

Integral Monte Carlo (1)

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/20/23
"""
import numpy as np
from scipy.integrate import simps
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("ggplot")
np.random.seed(212)

f = lambda x:np.sin(x) + 1

xs = np.linspace(0, 1.5 * np.pi, 100)
ys = f(xs)

# MC
lebar = 1.5 * np.pi - 0  # lebar: 0 hingga 1,5 pi
sampel = np.random.uniform(low=0, high=lebar, size=1000000)
```

```
luas_mc= f(sampel).mean() * lebar

plt.plot(xs, ys, label="$f(x) = \sin{(x)} + 1$")
plt.fill_between(xs, 0, ys, alpha=0.1)
plt.text(1, 0.5, f"Estimasi luas MC: {luas_mc:0.3f}", fontsize
    =12)
plt.xlabel("$x$", fontsize=16)
plt.ylabel("$y$", fontsize=16)
plt.legend();
plt.savefig("../gambar/gambar055.png", dpi=250)
```



Gambar 5.5: Estimasi luas kurva $\sin(x) + 1$ menggunakan metode MC.

Integrasi MC didasarkan pada hukum bilangan besar (*law of large numbers*). Hukum ini menyatakan, jika kita melakukan eksperimen yang sama secara berulang-ulang, rata-rata eksperimen tersebut seharusnya konvergen pada suatu nilai ekspektasi tertentu. Eksperimen kita di sini adalah mengambil sampel fungsi secara seragam, jadi jika kita terus mengambil sampel, hasil rata-rata seharusnya konvergen pada rata-rata fungsi tersebut. Hal ini seharusnya terasa intuitif, karena mirip dengan kasus jika kita melempar dadu, yang mempunyai enam sisi, selama berulang - ulang, dan mengambil nilai rata-rata-nya, maka didapatkan nilai 3,5. Dalam kasus di atas, kita mencoba mengkombinasikan fungsi $\sin(x) + 1$ dengan fungsi kepadatan peluang yang mendeskripsikan bagaimana cara kita melakukan pengambilan sampel. Dalam kasus ini, kita menggunakan fungsi kepadatan peluang yang seragam pada rentang nol hingga 1,5π:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{1{,}5\pi}, & \text{jika } 0 < x < 1,5 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \tag{5.30}$$

Variabel `lebar` dihitung dengan mengikutsertakan fungsi kepadatan peluang ke ekspresi 5.29:

$$\int_0^{1{,}5\pi} 1,5\pi(\sin(x) + 1)p(x)\,dx \tag{5.31}$$

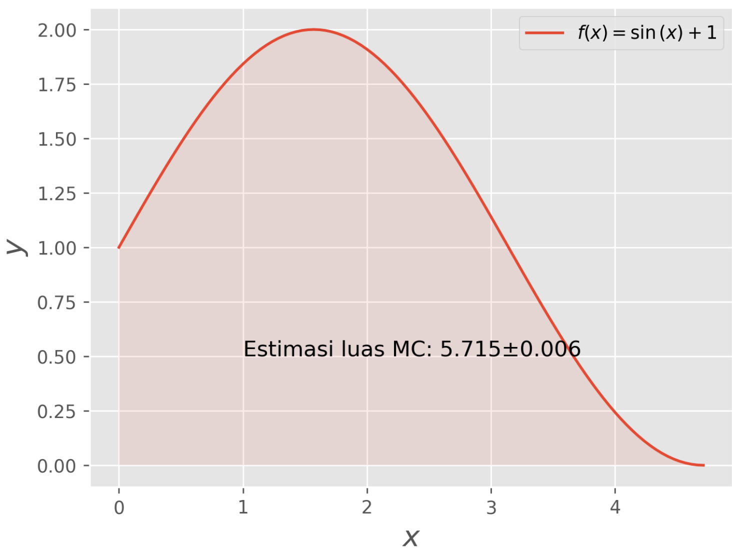
Mengapa kita membutuhkan banyak sekali sampel? Hal ini dilakukan guna memastikan bahwa aproksimasi statistik-nya dapat menyamai perhitungan numerik dari kaidah Simpson. Integrasi MC ini mempunyai ketidakpastian yang dapat diukur melalui galat (ε) sebagai berikut:

$$\varepsilon = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{N}} \tag{5.32}$$

, di mana σ adalah simpangan baku, x adalah objek yang hendak diratak-ratakan (sampel dikali lebar dalam kasus ini), dan N adalah jumlah titik acak. Berikut merupakan contoh perhitungan integral MC untuk ekspresi 5.29 dengan menggunakan galat (Gambar 5.6):

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_057.py

Integral Monte Carlo (2)

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/21/23
"""
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("ggplot")
np.random.seed(212)

f = lambda x:np.sin(x) + 1

xs = np.linspace(0, 1.5 * np.pi, 100)
ys = f(xs)

# MC
lebar = 1.5 * np.pi - 0  # lebar: 0 hingga 1,5 pi
sampel = np.random.uniform(low=0, high=lebar, size=1000000)
```

```
luas_mc= f(sampel).mean() * lebar
galat = np.std(sampel * lebar) / np.sqrt(sampel.size)

plt.plot(xs, ys, label="$f(x) = \sin{(x)} + 1$")
plt.fill_between(xs, 0, ys, alpha=0.1)
plt.text(1, 0.5, f"Estimasi luas MC: {luas_mc:0.3f}  {galat:0.3f
    }", fontsize=12)
plt.xlabel("$x$", fontsize=16)
plt.ylabel("$y$", fontsize=16)
plt.legend();
plt.savefig("../gambar/gambar056.png", dpi=250)
```



Gambar 5.6: Estimasi luas kurva $\sin(x) + 1$ menggunakan integrasi MC dan rentang galat.

788 Salah satu hal yang juga tidak boleh dilupakan dalam pembahasan ten-
789 tang integrasi MC adalah pentingnya teknik pengambilan sampel. Untuk
790 mengilustrasikannya, kita dapat menggunakan ekspresi 5.33 sebagai berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \tag{5.33}$$

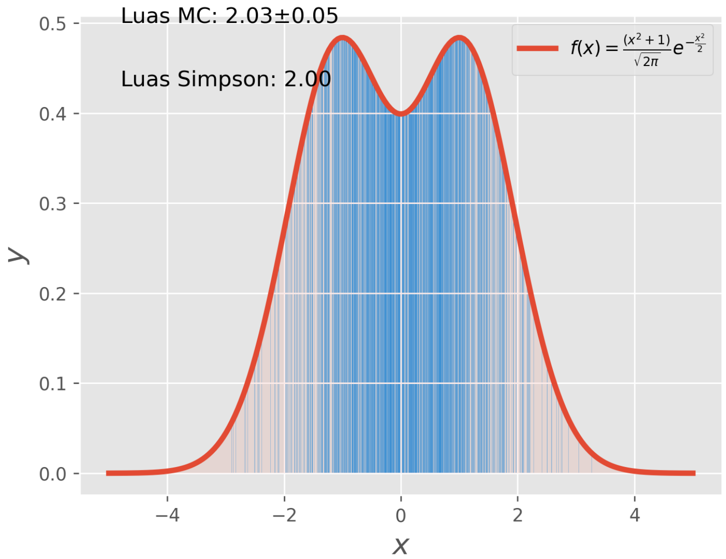
791 Untuk keperluan pengambilan sampel, ekspresi 5.33 dapat disederhanak-
792 an sebagai perkalian antara persamaan kuadrat dengan distribusi normal.
793 Oleh karena tidak memungkinkan untuk mengambil sampel dari distribu-

si seragam pada rentang $-\infty$ hingga ∞, maka kita hanya akan mengambil sampel dari distribusi normal dengan pusat di 0 dengan lebar 1 (Gambar 5.7:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + 1)\,\mathcal{N}(0,1)\,dx \tag{5.34}$$

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_058.py

Integral Monte Carlo (3)

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/21/23
"""
import numpy as np
from scipy.integrate import simps
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("ggplot")
np.random.seed(212)

# integrasi MC
sampel = np.random.normal(size=1000)
fmc = 1 + sampel ** 2
luas_mc = fmc.mean()
galat = np.std(fmc) / np.sqrt(fmc.size)

# integrasi Simpson
def f(xs):
    return (1 + xs**2) * np.exp(-(xs**2)/2) / np.sqrt(2 * np.pi)
xs = np.linspace(-5, 5, 200)
ys = f(xs)
luas_simps = simps(ys, x=xs)

# Plotting
plt.plot(xs, ys, label=r"$f(x) = \frac{(x^2 +1)}{\sqrt{2\pi}} e
    ^{-\frac{x^2}{2}}$", lw=3)
plt.fill_between(xs, 0, ys, alpha=0.1)
plt.text(-4.8, 0.5, f"Luas MC: {luas_mc:0.2f}  {galat:0.2f}",
    fontsize=12)
plt.text(-4.8, 0.43, f"Luas Simpson: {luas_simps:0.2f}",
    fontsize=12)
plt.plot((sampel, sampel), ([0 for i in sampel], [f(i) for i in
    sampel]),
         c='#1c93e8', lw=0.2, ls='-', zorder=-1, alpha=0.5)
plt.xlabel("$x$", fontsize=16)
plt.ylabel("$y$", fontsize=16)
plt.legend();
```

```
plt.savefig("../gambar/gambar057.png", dpi=250)
```



Gambar 5.7: Estimasi luas kurva $\frac{(x^2+1)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ menggunakan integrasi MC.

Tentu yang menjadi pertanyaan kemudian adalah, bagaimana cara kita melakukan pengambilan sampel jika persamaannya tidak mirip dengan persamaan pada distribusi normal? Kenyataannya adalah kita dapat melakukan pengambilan sampel dari distribusi manapun. Kita akan mencoba menerapkannya pada ekspresi berikut ini:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^4}{4}}\, dx \tag{5.35}$$

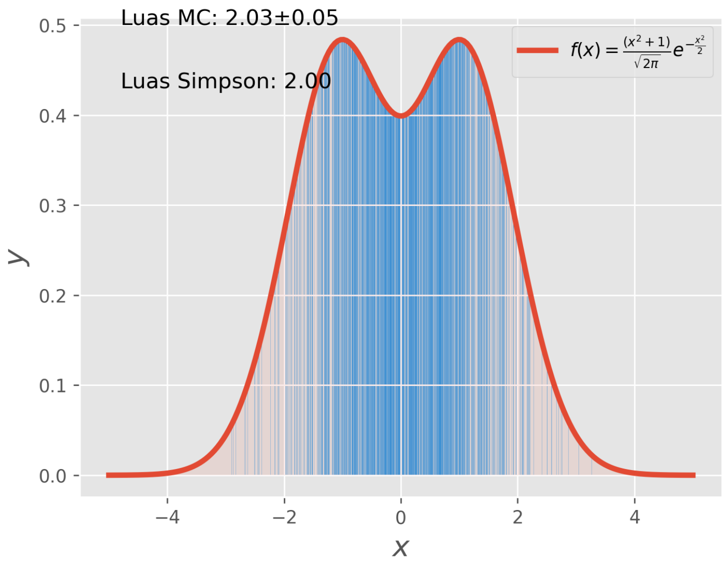
Guna menyelesaikannya dengan metode MC, kita wajib mengubah persamaan 5.35 menjadi bentuk sebagai berikut, di mana $p(x)$ dalam konteks ini merupakan distribusi normal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \approx \frac{f(x)}{p(x)} p(x) \tag{5.36}$$

Berikut implementasi-nya di Python, serta hasilnya diperlihatkan pada Gambar 5.8:

```
#!/usr/bin/env python

"""
```

```
contoh_059.py

Integral Monte Carlo (3)

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/21/23
"""

import numpy as np
from scipy.integrate import simps
from scipy.stats import norm
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("ggplot")
np.random.seed(212)

f = lambda xs:(1 + xs**2) * np.exp(-(xs**4)/4) / np.sqrt(2 * np.
    pi)

# integrasi MC
x_samp = norm.rvs(size=2000)
p_x = norm.pdf(x_samp)
nilai = f(x_samp) / p_x
luas = nilai.mean()
galat = np.std(nilai) / np.sqrt(nilai.size)

# integrasi Simpson
xs = np.linspace(-5, 5, 200)
ys = f(xs)
luas_simps = simps(ys, x=xs)

# plotting
plt.plot(xs, ys, label=r"$\frac{x^2 + 1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{
    x^4}{4}}$", lw=3)
plt.fill_between(xs, 0, ys, alpha=0.1)
plt.text(-4.8, 0.5, f"Luas MC: {luas:0.2f}  {galat:0.2f}",
    fontsize=12)
plt.text(-4.8, 0.43, f"Luas Simpson: {luas_simps:0.2f}",
    fontsize=12)
plt.plot((x_samp, x_samp), ([0 for i in x_samp], [f(i) for i in
    x_samp]),
         c='#e89a1c', lw=0.2, ls='-', zorder=-1, alpha=0.3)
plt.xlabel("$x$", fontsize=12)
plt.ylabel("$f(x)$", fontsize=12)
plt.legend()
plt.savefig("../gambar/gambar058.png", dpi=250)
```



Gambar 5.8: Estimasi luas kurva $\frac{(x^2+1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^4}{4}}$ menggunakan integrasi MC.

6

Sistem Persamaan Linier

Mayoritas permasalahan di bidang sains dan rekayasa melibatkan sistem persamaan linier (SPL) yang tersusun atas beberapa persamaan linier yang jumlahnya sama dengan variabel yang tidak diketahui (sistem persamaan 6.1). Sistem persamaan ini dapat direpresentasikan ke dalam bentuk matriks dan vektor (sistem persamaan 6.2), sehingga dapat dengan mudah diselesaikan dengan metode - metode yang telah kita pelajari di mata kuliah Aljabar Linier Elementer (atau di beberapa tempat disebut sebagai Matriks dan Ruang Vektor).

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Terdapat dua jenis metode numerik yang dapat diaplikasikan untuk mencari variabel dalam SPL ini. Pertama adalah metode eliminasi, yang bertujuan untuk mengeliminasi koefisien - koefisien matriks dengan menerapkan operasi baris dan kolom hingga variabel - variabel dapat diketahui dengan kalkulasi sederhana. Yang kedua adalah metode iteratif. Pada metode iteratif persamaan - persamaan disusun sedemikian rupa sehingga memungkinkan kita untuk melakukan perhitungan rekursif untuk mengetahui variabel - variabel, hingga tercapai kondisi konvergensi. Metode ini membutuhkan tebakan awal nilai - nilai variabel untuk menginisiasi proses perhitungan.

Metode Eliminasi Gauss

Metode ini merupakan metode yang paling dikenal khalayak luas untuk menyelesaikan SPL dan menjadi acuan dasar dari metode - metode penyelesaian lain yang lebih kompleks. Metode ini terdiri dari dua langkah penyelesaian. Langkah pertama adalah eliminasi elemen - elemen diagonal utama pada matriks koefisien. Langkah selanjutnya adalah pensubstitusian ulang variabel - variabel yang telah dikeathui ke sistem persamaan hingga seluruh variabel diketahui. Berikut rincian kedua tahapan tersebut:

1. Eliminasi

   Pada tahap ini kita membutuhkan tiga struktur pengulangan bersarang:

   (a) Pengulangan k dari 1 hingga $n-1$ untuk mengindeks baris - baris tetap dan mengeliminasi kolom.

   (b) Pengulangan i dari $k+1$ hingga n untuk mengindeks baris - baris yang telah dikurangi.

   (c) Pengulangan j dari k hingga n untuk mengindeks kolom - kolom guna operasi pengurangan antar elemen.

   Kita dapat menggunakan pernyataan eliminasi sebagai berikut:

$$a_{i,j} := a_{k,j} - \frac{a_{k,k}}{a_{i,k}} a_{i,j} \tag{6.3}$$

   Konstanta - konstanta baru dihitung dengan menggunakan pernyataan sebagai berikut di dalam pengulangan i:

$$b_i := b_k - \frac{a_{k,k}}{a_{i,k}} b_i a \tag{6.4}$$

   Pada akhir tahap ini, seluruh elemen diagonal utama harus sama dengan nol.

2. Pensubstitusian ulang

   (a) Dimulai dari baris terakhir, kita terapkan perhitungan:

$$x_n := \frac{b_n}{a_{n,n}} \tag{6.5}$$

(b) Kemudian substitusikan nilai - nilai yang diperoleh untuk x_{i+1}, kemudian hitung nilai - nilai x_i pada baris tersebut. Proses ini dapat dituliskan secara matematis melalui ekspresi sebagai berikut:

$$x_i := \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}} \tag{6.6}$$

Untuk memahami algoritma ini secara lebih praktis, maka kita akan mencoba untuk menyelesaikan sistem persamaan berikut ini secara numerik:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

Berikut adalah kode Python-nya:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_061.py

Metode Eliminasi Gauss (1)

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/19/23
"""

import numpy as np

a = np.array([[2, 7, -1, 3, 1],
              [2, 3, 4, 1, 7],
              [6, 2, -3, 2, -1],
              [2, 1, 2, -1, 2],
              [3, 4, 1, -2, 1]],float)

b = np.array([5, 7, 2, 3, 4], float)
n = len(b)
x = np.zeros(n, float)

# Eliminasi
for k in range(n-1):
    for i in range(k+1, n):
        fktr = a[k, k] / a[i, k]
        b[i] = b[k] - fktr*b[i]
```

```python
        for j in range(k, n):
            a[i, j] = a[k, j] - fktr*a[i, j]

# Substitusi ulang
x[n-1] = b[n-1] / a[n-1, n-1]
for i in range(n-2, -1, -1):
    suku = 0
    for j in range(i+1, n):
        suku += a[i, j]*x[j]
    x[i] = (b[i] - suku)/a[i, i]

print("Solusi SPL: ")
print("\n")
print(x)
```

Hasilnya:

```
Solusi SPL:

[0.44444444 0.55555556 0.66666667 0.22222222 0.22222222]
```

Guna lebih memahami tentang implementasi numerik metode eliminasi Gauss, kita akan mencoba menyelesaikan SPL yang berbeda pada contoh berikut ini:

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

Berikut ini implementasi penyelesaiannya di Python:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_062.py

Metode Eliminasi Gauss (2)

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/19/23
"""

import numpy as np

a = np.array([[0, 7, -1, 3, 1],
              [2, 3, 4, 1, 7],
```

```
              [6, 2, 0, 2, -1],
              [2, 1, 2, 0, 2],
              [3, 4, 1, -2, 1]],float)

b = np.array([5, 7, 2, 3, 4], float)
n = len(b)
x = np.zeros(n, float)

# Eliminasi
for k in range(n-1):
    if a[k, k] == 0:
        for j in range (n):
            a[k,j], a[k+1, j] = a[k+1, j], a[k,j]
        b[k], b[k+1] = b[k+1], b[k]
    for i in range(k+1, n):
        if a[i, k] == 0: continue
        fktr = a[k, k] / a[i, k]
        b[i] = b[k] - fktr*b[i]
        for j in range(k, n):
            a[i, j] = a[k, j] - fktr*a[i, j]

# Substitusi ulang
x[n-1] = b[n-1] / a[n-1, n-1]
for i in range(n-2, -1, -1):
    suku = 0
    for j in range(i+1, n):
        suku += a[i, j]*x[j]
    x[i] = (b[i] - suku)/a[i, i]

print("Solusi SPL:")
print("\n")
print(x)
```

Hasilnya:

```
Solusi SPL:

[0.02170543 0.79224806 1.05116279 0.15813953 0.03100775]
```

Metode Gauss-Jordan

Metode Gauss-Jordan bertujuan untuk mengeliminasi seluruh elemen di atas dan di bawah diagonal utama, sehingga mentransformasikan matriks koefisien menjadi matriks identitas I_n, serta mentransformasikan vektor konstanta menjadi vektor solusi. Dengan kata lain, metode Gauss-Jordan mentransformasikan sistem persamaan 6.2 menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

, di mana $b_1^*, b_2^*, \cdots, b_n^*$ merupakan nilai - nilai dari suku konstanta sesudah mengalami transformasi sebanyak n kali.

Algoritma dari metode ini cukup mirip dengan metode eliminasi Gauss dengan satu pengecualian, yakni proses eliminasi akan diterapkan pada seluruh baris di atas dan di bawah baris pivot. Dengan demikian, kita tidak menemukan operasi pensubstitusian ulang seperti pada metode eliminasi Gauss karena pada akhir proses eliminasi vektor konstanta akan dengan sendirinya bertransformasi menjadi vektor solusi.

Langkah pertama pada metode Gauss-Jordan adalah melakukan *pivoting* parsial dengan cara menyusun ulang baris SPL untuk setiap transformasi guna menjamin terdapatnya elemen - elemen bukan nol pada diagonal utama matriks koefisien. Selanjutnya dilakukan pembagian setiap baris SPL terhadap elemen pivot pada masing - masing baris $a_{k,k}$. Langkah ini dilakukan untuk mendapatkan nilai satu pada seluruh elemen di diagonal utama. Langkah terakhir adalah pengeliminasian seluruh elemen di atas dan di bawah diagonal utama. Diperlukan tiga struktur pengulangan sebagai berikut untuk menyelesaikan operasi tersebut:

1. Pengulangan utama k dilakukan dari baris 1 hingga baris ke-n guna mengindeks baris - baris pivot. Pada operasi ini, setiap elemen pada baris pivot dibagi oleh elemen pivot:

   $$a_{k,j}^* := \frac{a_{k,j}}{a_{k,k}}; \quad b_k^* := \frac{b_k}{a_{k,k}}; \quad k = 1, 2, \cdots; \quad j = k, n \tag{6.10}$$

   Tanda $*$ menandakan elemen dengan nilai baru.

2. Pengulangan i dari baris 1 hingga baris ke-n digunakan untuk mengindeks baris - baris pengurangan. Guna menghindari pengurangan baris pivot dari baris itu sendiri, maka ketika $i = k$, atau jika koefisien sudah bernilai nol, proses pengurangan pada i dapat dilangkahi.

3. Pengulangan k dari j ke n bertujuan untuk mengindeks elemen - elemen hasil pengurangan mulai dari elemen pivot hingga ke kolom terakhir.

Operasi eliminasi ini dapat dirangkum melalui ekspresi sebagai berikut:

$$a_{i,j}^* := a_{i,j} - a_{i,k}a_{k,j} \tag{6.11}$$

Vektor konstanta baru yang juga merupakan solusi dari SPL dihitung melalui pengulangan i dengan menggunakan ekspresi sebagai berikut:

$$b_i^* := b_i - a_{i,k}b_k^*, \quad k = 1, 2, \cdots, n; i = 1, 2, \cdots, n; i \neq k \tag{6.12}$$

Implementasi numerik-nya di Python dapat diperhatikan pada kode berikut ini:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_063.py

Metode Gauss-Jordan

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/22/23
"""

import numpy as np

def gssjrdn(a,b):
    a = np.array(a, float)
    b = np.array(b, float)
    n = len(b)

    # pengulangan utama
    for k in range(n):

        # pivoting parsial
        if np.fabs(a[k,k]) < 1.0e-12:
            for i in range(k+1,n):
                if np.fabs(a[i,k]) > np.fabs(a[k,k]):
                    a[[k,i]] = a[[i,k]]
                    b[[k,i]] = b[[i,k]]
                    break

        # pembagian pada baris pivot
        pivot = a[k,k]
        a[k] /= pivot
        b[k] /= pivot

        # pengulangan eliminasi
        for i in range(n):
            if i == k or a[i,k] == 0: continue
            faktor = a[i,k]
```

```python
                a[i] -= faktor * a[k]
                b[i] -= faktor * b[k]
    return b,a


a = [[0,2,0,1],
     [2,2,3,2],
     [4,-3,0,1],
     [6,1,-6,-5]]

b = [0,-2,-7,6]

X,A = gssjrdn(a,b)

print("Solusi SPL: ")
print(X)
print("\n")
print("Matriks koefisien sesudah transformasi: ")
print(A)
```

```
Solusi SPL:
[-0.5         1.          0.33333333 -2.        ]


Matriks koefisien sesudah transformasi:
[[ 1.  0.  0.  0.]
 [ 0.  1.  0.  0.]
 [-0. -0.  1.  0.]
 [-0. -0. -0.  1.]]
```


Metode Jacobi

Metode ini merupakan metode iteratif dasar yang umum digunakan untuk menyelesaikan SPL. Prinsip dasar metode ini mirip dengan metode iterasi sederhana yang telah kita bahas sebelumnya. SPL yang hendak diselesaikan diatur ulang dengan mengambil variabel yang berbeda dari setiap persamaan ke sisi kiri, kemudian, dimulai dengan tebakan awal untuk semua variabel, nilai-nilai yang dihasilkan dari persamaan tersebut digantikan kembali pada setiap iterasi hingga kondisi konvergensi terpenuhi untuk setiap variabel.

Pada bagian ini, kita akan menyelesaikan sistem persamaan berikut dengan menggunakan metode Jacobi:

$$
\begin{aligned}
4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\
3x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\
2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 3 \\
4x_1 + x_2 - 3x_3 - 8x_4 &= 2
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Berikut adalah susunan ulang sistem persamaan tersebut guna menyelesaikannya dengan metode Jacobi:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{4}(x_2 + 2x_3 - x_4 - 2) \\
x_2 &= -\frac{1}{6}(3x_1 - x_3 + 2x_4 + 1) \\
x_3 &= -\frac{1}{5}(2x_1 - x_2 - 3x_4 - 3) \\
x_4 &= \frac{1}{8}(4x_1 + x_2 - 3x_3 - 2)
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

Atau secara umum dapat dirangkum ke dalam ekspresi berikut ini:

$$
x_i^* := -\frac{1}{a_{i,i}} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j} x_j - b_i \right) \tag{6.15}
$$

Tanda $*$ pada x_i menunjukkan nilai baru saat iterasi berlangsung. Metode Jacobi ini dapat diselesaikan dengan dua struktur pengulangan. Pengulangan i digunakan untuk menyelesaikan masing - masing persamaan guna mendapatkan nilai x_i. Sementara itu, pengulangan j digunakan untuk melakukan operasi penjumlahan suku - suku sisa pada sisi kanan persamaan. Sesudah menempatkan tebakan awal, diperlukan pengaturan toleransi galat yang dikehendaki sebagai syarat konvergensi dari seluruh variabel. Kita juga wajib mengatur batas iterasi sebagai antisipasi jika syarat konvergensi itu tidak juga dipenuhi, untuk mencegah pengulangan terus menerus. Berikut ini merupakan implementasinya di Python:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_064.py

Metode Jacobi

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/19/23
"""
```

```python

import numpy as np

a = np.array([[4, 1, 2, -1],
              [3, 6, -1, 2],
              [2, -1, 5, -3],
              [4, 1, -3, -8]],float)

b = np.array([2, -1, 3, 2], float)
(n,) = np.shape(b) # ukuran array

x = np.full(n, 1.0, float)  # tebakan awal = 1
x_baru = np.empty(n, float) # nilai x baru

batas_iter = 100 # batas iterasi
tol = 1.0e-6 # toleransi galat

# iterasi
for iterasi in range(batas_iter):
    for i in range(n):
        s = 0
        for j in range(n):
            if j != i:
                s += a[i, j]*x[j]
        x_baru[i] = -1/a[i,i] * (s - b[i])
    if (abs(x_baru - x) < tol).all(): # kondisi konvergensi
        break
    else:
        x = np.copy(x_baru) # kopi seluruh elemen x_baru ke x

print("Jumlah iterasi: %d "%(iterasi+1))
print("Solusi SPL:")
print("\n")
print(x)
```

Hasilnya:

```
Jumlah iterasi: 31
Solusi SPL:

[ 0.3650067  -0.23378439  0.28506845 -0.20362079]
```

Metode Gauss-Seidel

Metode ini merupakan metode iteratif yang mempunyai banyak kemiripan dengan metode Jacobi yang telah kita bahas sebelumnya. Metode Gauss-Seidel mengaplikasikan nilai - nilai x baru ke dalam persamaan - persamaan berikutnya di dalam satu iterasi yang sama, sementara pada metode Jacobi nilai - nilai tersebut baru diaplikasikan pada iterasi selanjutnya. Secara umum metode Gauss-Seidel ini dapat dituliskan dalam ekpresi berikut ini:

$$x_i^* := -\frac{1}{a_{i,i}}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j^* - b_i\right) \tag{6.16}$$

Dalam konteks ini, variabel x_j^* merupakan solusi dari penyelesaian persamaan sebelumnya. Berikut ini implementasi numeriknya di Python untuk sistem persamaan 6.13:

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_065.py

Metode Gauss-Seidel

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/19/23
"""

import numpy as np

a = np.array([[4, 1, 2, -1],
              [3, 6, -1, 2],
              [2, -1, 5, -3],
              [4, 1, -3, -8]],float)

b = np.array([2, -1, 3, 2], float)
(n,) = np.shape(b)
x = np.full(n, 1.0, float) # tebakan awal = 1

beda_x = np.empty(n, float) # beda x setiap 2 iterasi
batas_iter = 100
tol = 1.0e-6

# iterasi
for iterasi in range(batas_iter):
    for i in range(n):
        s = 0
        for j in range(n):
            if j != i:
                s += a[i, j]*x[j]
        x_baru = -1/a[i,i] * (s - b[i]) # x_baru -> skalar
        beda_x[i] = abs(x_baru - x[i]) # hitung beda absolut
        x[i] = x_baru # penugasan nilai baru ke x[i]
```

```
    if(beda_x < tol).all(): # cek konvergensi u/ seluruh pers.
        break

print("Jumlah iterasi: %d "%(iterasi+1))
print("Solusi SPL:")
print("\n")
print(x)
```

Hasilnya:

```
Jumlah iterasi: 13
Solusi SPL:

[ 0.36500739 -0.23378566  0.28506799 -0.20362001]
```

Nampak dari jumlah iterasinya, bahwa metode Gauss-Seidel lebih efektif dibandingkan metode Jacobi.

Syarat Dominasi Diagonal

Terdapat kondisi konvergensi yang wajib dipenuhi sebelum kita mengaplikasikan metode Jacobi atau Gauss-Seidel. Syarat ini dikenal sebagai dominasi diagonal (*diagonal dominance*). Syarat ini menyatakan bahwa nilai absolut dari elemen - elemen di diagonal utama harus menjadi koefisien terbesar pada setiap persamaan di dalam SPL. Oleh karena itu, persamaan - persamaan di dalam SPL harus disusun sedemikian rupa agar dapat memenuhi kriteria ini.

Untuk memahami syarat dominasi diagonal perhatikanlah SPL berikut ini:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 - 8x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \end{aligned} \tag{6.17}$$

SPL ini sama dengan SPL 6.13. Satu - satu-nya hal yang berbeda hanya susunan persamaan. Berikut ini bentuknya di dalam format matriks:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \mathbf{5} & -3 \\ \mathbf{4} & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -3 & -\mathbf{8} \\ 3 & \mathbf{6} & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

Pada SPL 6.18 elemen absolut terbesar di dalam matriks koefisien untuk masing - masing persamaan (ditandai dengan cetak tebal) tidak terletak di diagonal utama. Guna melihat bagaimana hal ini mempengaruhi konvergensi, kita coba terapkan kode Python berikut ini untuk menemukan solusi SPL 6.18 dengan menggunakan metode Gauss-Seidel:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_066.py

Dominasi Diagonal

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/20/23
"""

import numpy as np

A = np.array([[2, -1, 5, -3],
              [4, 1, 2, -1],
              [4, 1, -3, -8],
              [3, 6, -1, 2]],float)

b = np.array([3, 2, 2, -1], float)

(n,) = np.shape(b)
x = np.full(n, 1.0, float) # tebakan awal x = 1

beda_x = np.empty(n, float)
batas_iter = 100
tol = 1.0e-6

# iterasi
for iterasi in range(batas_iter):
    for i in range(n):
        s = 0
        for j in range(n):
            if j != i:
                s += A[i, j]*x[j]
        x_baru = -1/A[i,i] * (s - b[i])
        beda_x = abs(x_baru - x[i])
        x[i] = x_baru
    if(beda_x < tol).all():
        break

print("Jumlah iterasi: %d"%(iterasi+1))
print("Solusi SPL: ")
print(x)
```

Nampak bahwa terjadi divergensi, yang ditandai dengan bertambahnya jumlah iterasi dan ketidakakuratan solusi, oleh karena SPL tersebut tidak disusun sesuai dengan syarat dominasi diagonal meskipun menggunakan SPL dan metode penyelesaian yang sama:

```
Jumlah iterasi: 100
Solusi SPL:
[ 8.43572172e+109 -2.71345274e+110 -1.09039090e+110  6.32980450e+110]
```

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Menggunakan NumPy dan SciPy

Modul aljabar linier `numpy.linalg` dan `scipy.linalg` memiliki berbagai macam fungsi yang dapat kita gunakan untuk memanipulasi matriks dan menyelesaikan SPL tanpa memusingkan soal struktur pengulangan bersarang yang banyak kita gunakan sejauh ini. Terdapat dua metode yang umum digunakan untuk menyelesaikan SPL, yakni metode langsung dengan menggunakan fungsi `solve()` dari SciPy dan kombinasi dengan menggunakan fungsi `inv()` di SciPy dan `dot()` di NumPy. Berikut adalah contoh penggunaannya:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_067.py

Penggunaan NumPy & SciPy
untuk SPL

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/20/23
"""

import numpy as np
from scipy.linalg import solve, inv

A1 = np.array([[0, 7, -1, 3, 1],
               [2, 3, 4, 1, 7],
               [6, 2, 0, 2, -1],
               [2, 1, 2, 0, 2],
               [3, 4, 1, -2, 1]],float)

b1 = np.array([5, 7, 2, 3, 4], float)
```

```

A2 = np.array([[2, -1, 5, -3],
               [4, 1, 2, -1],
               [4, 1, -3, -8],
               [3, 6, -1, 2]], float)

b2 = np.array([3, 2, 2, -1], float)

# metode langsung menggunakan solve()
x1 = solve(A1, b1)
x2 = solve(A2, b2)

print("x1 (langsung): ")
print(x1)
print("x2 (langsung): ")
print(x2)
print("\n")

# metode tdk langsung menggunakan inv() & np.dot()
x1 = np.dot(inv(A1), b1)
x2 = np.dot(inv(A2), b2)

print("x1 (tdk langsung): ")
print(x1)
print("x2 (tdk langsung): ")
print(x2)
```

Hasilnya:

```
x1 (langsung):
[0.02170543 0.79224806 1.05116279 0.15813953 0.03100775]
x2 (langsung):
[ 0.36500754 -0.23378582  0.28506787 -0.20361991]

x1 (tdk langsung):
[0.02170543 0.79224806 1.05116279 0.15813953 0.03100775]
x2 (tdk langsung):
[ 0.36500754 -0.23378582  0.28506787 -0.20361991]
```

Meskipun menghasilkan solusi yang sama, untuk kebutuhan praktis, seperti dalam riset maupun industri, kami menyarankan untuk menggunakan metode langsung dengan fungsi `solve()`. Hal ini dilakukan untuk mengurangi operasi matriks yang dapat memperlambat waktu komputasi. Untuk mengetahui secara lebih lanjut mengenai fungsi - fungsi ini kalian dapat berkunjung pada situs - situs berikut ini:

- https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.linalg.html

- https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/linalg.html

7

Persamaan Diferensial Biasa

Metode numerik yang hendak dibahas pada bab ini adalah tentang penyelesaian persamaan diferensial biasa (PDB, atau dalam istilah *keren* berbahasa Inggris-nya dikenal sebagai *ordinary differential equation/ODE*). Permasalahan PDB yang dibahas di bab ini berkaitan dengan prediksi trajektori suatu sistem jika diberikan kondisi inisial tertentu, atau istilah teknisnya dikenal sebagai *initial value problem (IVP)*.

Metode Euler

Deret Taylor dapat dituliskan menjadi:

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{y''(x)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x)}{3!}h^3 + \dots \tag{7.1}$$

Dengan mengabaikan turunan lain selain turunan pertama (*first order approximation*), kita mendapatkan apa yang dinamakan sebagai metode Euler untuk menyelesaikan PDB secara numerik:

$$y(x+h) \approx y(x) + y'(x)h \tag{7.2}$$

Kondisi awal dalam kasus ini merupakan nilai y saat $x = 0$. Metode ini juga dikenal sebagai metode titik-garis (*point-slope method*), karena guna memprediksi titik berikutnya, kita menggunakan kemiringan garis $y'(x)$.

Untuk memahami metode ini secara praktis, maka kita akan mengaplikasikannya guna menemukan solusi numerik dari PDB berikut ini pada domain $[0, 2]$:

$$\frac{dy}{dx} = y' = xy, \quad y(0) = 1 \tag{7.3}$$

Persamaan 7.3 merupakan PDB linier orde 1 yang dapat kita selesaikan secara analitik dengan menggunakan teknik pemisahan variabel untuk kemudian diintergrasikan di kedua ruas-nya:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y}\,dy &= x\,dx \\ \int \frac{1}{y}\,dy &= \int x\,dx \end{aligned} \tag{7.4}$$

Hasilnya:

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C \tag{7.5}$$

Dalam konteks ini C merupakan konstanta integrasi. Untuk menentukan C, kita menggunakan kondisi awal $y(0) = 1$:

$$\begin{aligned} \ln|1| &= 0 \\ 0 &= \frac{1}{2}(0)^2 + C \\ C &= 0 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Sehingga, solusi dari PDB ini adalah:

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 \tag{7.7}$$

Dengan melakukan eksponensiasi di kedua ruas persamaan, maka akan menjadi:

$$|y| = e^{\frac{1}{2}x^2} \tag{7.8}$$

Namun, karena $y(0) = 1$, kita hanya memperhintungkan nilai positif-nya saja, sehingga solusi analitik PDB 7.3 menjadi:

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2} \tag{7.9}$$

Kita dapat menerapkan metode Euler dengan mudah melalui struktur pengulangan tunggal di Python:

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_071.py

Metode Euler (1)

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
```

```python
12/21/23
"""
from math import exp

dfdy = lambda x,y: x*y # dfdy = xy (PDB)
f = lambda x:exp(x**2/2) # solusi analitik

x = 0 # nilai awal x
xn = 2 # nilai akhir x
y = 1 # nilai y(x = 0)
h = 0.5 # step size
n = int((xn-x)/h) # jumlah step

# tampilkan kolom solusi
print ('x \t\t y (Euler) \t y (Analitik)')
print ('%f \t %f \t %f'% (x,y,f(x)))

for i in range(1,n+1):
    y += dfdy(x, y)*h # kalulasi y berikutnya
    x += h # x berikutnya
    print ('%f \t %f \t %f'% (x,y,f(x)))
```

Tampak jelas terdapat galat yang cukup besar pada setiap langkah dari solusi numerik ini. Galat-nya bervariasi mulai dari 24,18% pada $x = 1$, hingga 55,59%:

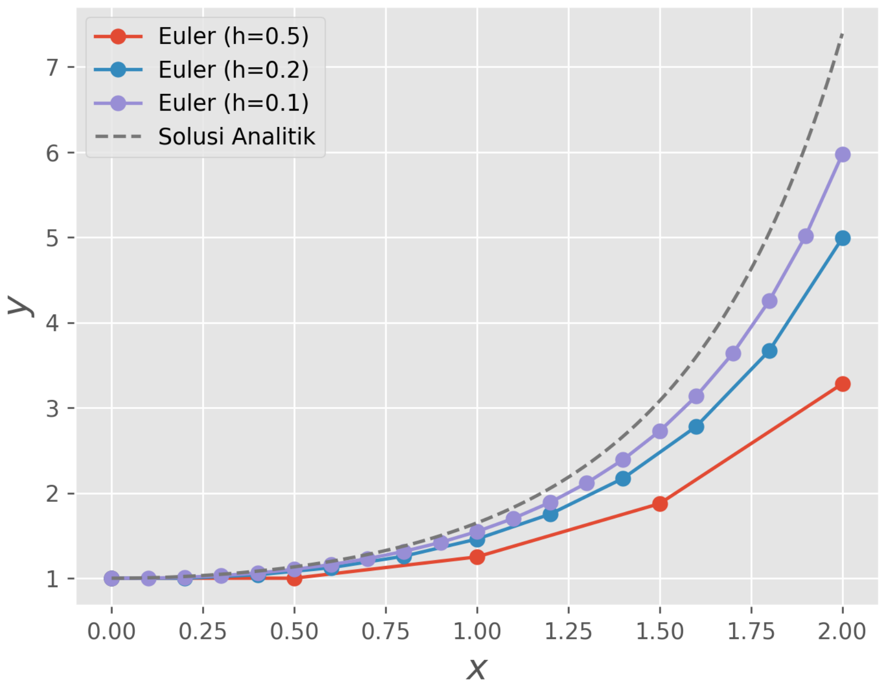
```
    x      y (Euler)    y (Analitik)
0.000000   1.000000   1.000000
0.500000   1.000000   1.133148
1.000000   1.250000   1.648721
1.500000   1.875000   3.080217
2.000000   3.281250   7.389056
```


Tampak jika kita menurunkan *step size* menjadi $h = 2$, galat pada $x = 1$ dan $x = 2$ berkurang menjadi 11,49% dan 32,47%. Kita dapat menghitung dan memvisualisasikan (Gambar 7.1) metode Euler pada nilai h berbeda dengan menggunakan kode Python berikut:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_072.py

Metode Euler (2)

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/21/23
```

```python
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("ggplot")

def metode_euler(x0, xn, y0, h):
    dfdy = lambda x, y: x * y  # dfdy = xy (PDB)
    f = lambda x: np.exp(x ** 2 / 2)  # solusi analitik

    n = int((xn - x0) / h)  # jumlah step

    nilai_x = [x0 + i * h for i in range(n + 1)]
    nilai_y = [y0]

    for i in range(1, n + 1):
        y0 += dfdy(x0, y0) * h  # kalulasi y berikutnya
        x0 += h  # x berikutnya
        nilai_y.append(y0)

    return nilai_x, nilai_y

# nilai awal
x0 = 0
xn = 2
y0 = 1

# hitung solusi untuk h=0.5, h=0.2, and h=0.1
nilai_h = [0.5, 0.2, 0.1]

for h in nilai_h:
    nilai_x, nilai_y = metode_euler(x0, xn, y0, h)

    # tampilkan hasil
    print(f"\nSolusi untuk h={h}:")
    print("x\t\ty (Euler)\t\ty (Analitik)")
    for x, y, y_analitik in zip(nilai_x, nilai_y, map(lambda x:
        np.exp(x ** 2 / 2), nilai_x)):
        print(f"{x:.4f}\t{y:.6f}\t{y_analitik:.6f}")

    # plot solusi numerik dengan garis dan titik
    plt.plot(nilai_x, nilai_y, marker='o', linestyle='-', label=
        f'Euler (h={h})')

# plot solusi analitik
x_analitik = np.linspace(x0, xn, 100)
y_analitik = [np.exp(x ** 2 / 2) for x in x_analitik]
plt.plot(x_analitik, y_analitik, label='Solusi Analitik',
    linestyle='--')
```

```
# tambah label
plt.xlabel('$x$', fontsize=16)
plt.ylabel('$y$', fontsize=16)
plt.legend()
plt.savefig("../gambar/gambar071.png", dpi=250)
```



Gambar 7.1: Solusi numerik PDB 7.3 dengan metode Euler untuk nilai h yang berbeda.

Nampak pada Gambar 7.1, meskipun kita memperkecil h menjadi 0,1, galat numerik-nya masih tetap cukup besar. Kelemahan metode Euler ini adalah diperlukannya perhitungan *step size* yang cukup kecil, guna menghasilkan aproksimasi numerik yang akurat. Hal ini akan memperlambat *run time* dan memperberat alokasi memori pada komputer, oleh karena banyaknya proses perhitungan *array* yang dilakukan. Oleh karena itu, dalam dunia modern ini, kita jarang menggunakan metode Euler.

Metode Runge-Kutta Orde Dua

Metode Runge-Kutta (RK) juga didasarkan pada deret Taylor, seperti pada metode Euler. Namun yang membedakan adalah RK mengikutsertakan suku - suku berderajat tinggi, sehingga dapat menghasilkan aproksimasi numerik yang lebih akurat. Metode RK orde dua (RK2) sendiri merupakan metode RK yang mengikutsertakan aproksimasi dari suku turunan kedua di deret Taylor:

$$y(x+h) = y(x) + y'\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}y'(x,y)\right)h \tag{7.10}$$

Guna memudahkan proses komputasi, persamaan 7.9 dapat dibagi menjadi tiga tahapan perhitungan:

$$\begin{aligned} K_1 &= hy'(x,y) \\ K_2 &= hy'\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}K_1\right) \\ y(x+h) &= y(x) + K_2 \end{aligned} \tag{7.11}$$

Berikut adalah implementasinya di Python untuk $h = 0,5$ pada contoh kasus persamaan 7.3:

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_073.py

Metode RK2 (1)

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/21/23
"""

from math import exp

dfdy = lambda x,y: x*y
f = lambda x: exp(x**2/2)

x = 0
xn = 2
y = 1
h = 0.5
n = int((xn-x)/h)

print ('x \t\t y (RK2) \t y (analitik)')
print ('%f \t %f \t %f'% (x,y,f(x)))
```

```

# pengulangan utama
for i in range(1,n+1):
    K1 = h*dfdy(x, y)
    K2 = h*dfdy(x + h/2, y + K1/2)
    y += K2
    x += h
    print ('%f \t %f \t %f'% (x,y,f(x)))
```

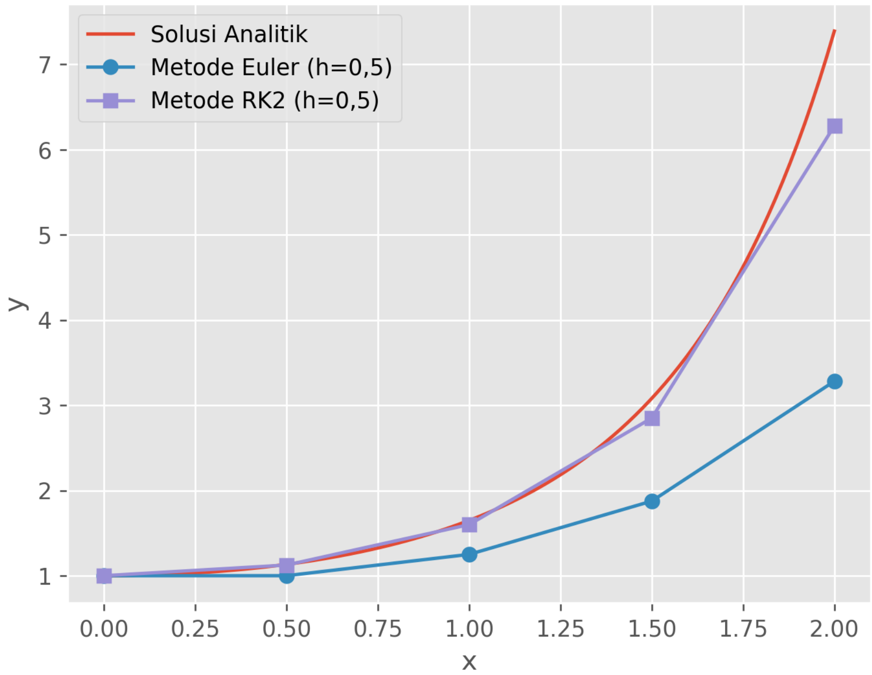
Hasilnya:

```
    x      y (RK2)    y (analitik)
0.000000   1.000000   1.000000
0.500000   1.125000   1.133148
1.000000   1.599609   1.648721
1.500000   2.849304   3.080217
2.000000   6.277373   7.389056
```

Nampak jika solusi numerik dsari metode RK2 jauh lebih tepat dibandingkan solusi numerik dari metode Euler. Visualisasi perbandingan keduanya dapat dilihat pada Gambar 7.2 berikut ini.

```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_074.py

Komparasi Metode Euler, RK2, dan Solusi Analitik

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/21/23
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("ggplot")

# Fungsi yang merepresentasikan persamaan diferensial
dfdy = lambda x, y: x * y

# Solusi analitik dari persamaan diferensial
f = lambda x: np.exp(x**2/2)

# Metode Euler
def metode_euler(h, x0, y0, xn):
    jum_step = int((xn - x0) / h) + 1
    nilai_x = np.linspace(x0, xn, jum_step)
    nilai_y = np.zeros(jum_step)
```

```
    nilai_y[0] = y0

    for i in range(1, jum_step):
        nilai_y[i] = nilai_y[i - 1] + h * dfdy(nilai_x[i - 1], nilai_y[i - 1])

    return nilai_x, nilai_y

# Metode RK2
def runge_kutta_2(h, x0, y0, xn):
    jum_step = int((xn - x0) / h) + 1
    nilai_x = np.linspace(x0, xn, jum_step)
    nilai_y = np.zeros(jum_step)
    nilai_y[0] = y0

    for i in range(1, jum_step):
        K1 = h * dfdy(nilai_x[i - 1], nilai_y[i - 1])
        K2 = h * dfdy(nilai_x[i - 1] + h / 2, nilai_y[i - 1] + K1 / 2)
        nilai_y[i] = nilai_y[i - 1] + K2

    return nilai_x, nilai_y

# Parameter
x0 = 0
xn = 2
y0 = 1
h = 0.5

# Metode Euler
x_euler, y_euler = metode_euler(h, x0, y0, xn)

# Metode RK2
x_rk2, y_rk2 = runge_kutta_2(h, x0, y0, xn)

# Solusi analitik
x_analitik = np.linspace(x0, xn, 100)
y_analitik = f(x_analitik)

# Plot hasil
plt.plot(x_analitik, y_analitik, label='Solusi Analitik')
plt.plot(x_euler, y_euler, 'o-', label='Metode Euler (h=0,5)')
plt.plot(x_rk2, y_rk2, 's-', label='Metode RK2 (h=0,5)')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.savefig("../gambar/gambar072.png", dpi=250)
```



Gambar 7.2: Perbandingan solusi numerik PDB 7.3 $h = 0,5$: Euler vs. RK2.

Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode RK orde empat (RK4) merupakan metode penyelesaian numerik PDB yang umum digunakan. Hal ini dikarenakan akurasi-nya yang cukup tinggi jika dibandingkan dengan metode Euler dan RK2. Akurasi ini diperoleh karena metode RK4 menyertakan aproksimasi dari suku turunan deret Taylor yang lebih tinggi jika dibandingkan dengan RK2. Berikut adalah persmaan - persamaan yang digunakan untuk menyelesaikan PDB dengan metode RK4:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= hy'(x, y) \\
K_2 &= hy'\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}K_1\right) \\
K_3 &= hy'\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}K_2\right) \\
K_4 &= hy'\left(x + h, y + K_3\right) \\
y(x + h) &= y(x) + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

Berikut ini adalah implementasi-nya di Python untuk menyelesaikan persamaan 7.3 secara numerik menggunakan $h = 0,5$:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_074.py

Komparasi Metode Euler, RK2, dan Solusi Analitik

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/21/23
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("ggplot")

# Fungsi yang merepresentasikan persamaan diferensial
dfdy = lambda x, y: x * y

# Solusi analitik dari persamaan diferensial
f = lambda x: np.exp(x**2/2)

# Metode Euler
def metode_euler(h, x0, y0, xn):
    jum_step = int((xn - x0) / h) + 1
    nilai_x = np.linspace(x0, xn, jum_step)
    nilai_y = np.zeros(jum_step)
    nilai_y[0] = y0

    for i in range(1, jum_step):
        nilai_y[i] = nilai_y[i - 1] + h * dfdy(nilai_x[i - 1], nilai_y[i - 1])

    return nilai_x, nilai_y

```

```python
# Metode RK2
def runge_kutta_2(h, x0, y0, xn):
    jum_step = int((xn - x0) / h) + 1
    nilai_x = np.linspace(x0, xn, jum_step)
    nilai_y = np.zeros(jum_step)
    nilai_y[0] = y0

    for i in range(1, jum_step):
        K1 = h * dfdy(nilai_x[i - 1], nilai_y[i - 1])
        K2 = h * dfdy(nilai_x[i - 1] + h / 2, nilai_y[i - 1] + K1 / 2)
        nilai_y[i] = nilai_y[i - 1] + K2

    return nilai_x, nilai_y

# Parameter
x0 = 0
xn = 2
y0 = 1
h = 0.5

# Metode Euler
x_euler, y_euler = metode_euler(h, x0, y0, xn)

# Metode RK2
x_rk2, y_rk2 = runge_kutta_2(h, x0, y0, xn)

# Solusi analitik
x_analitik = np.linspace(x0, xn, 100)
y_analitik = f(x_analitik)

# Plot hasil
plt.plot(x_analitik, y_analitik, label='Solusi Analitik')
plt.plot(x_euler, y_euler, 'o-', label='Metode Euler (h=0,5)')
plt.plot(x_rk2, y_rk2, 's-', label='Metode RK2 (h=0,5)')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.savefig("../gambar/gambar072.png", dpi=250)
```

Hasilnya:

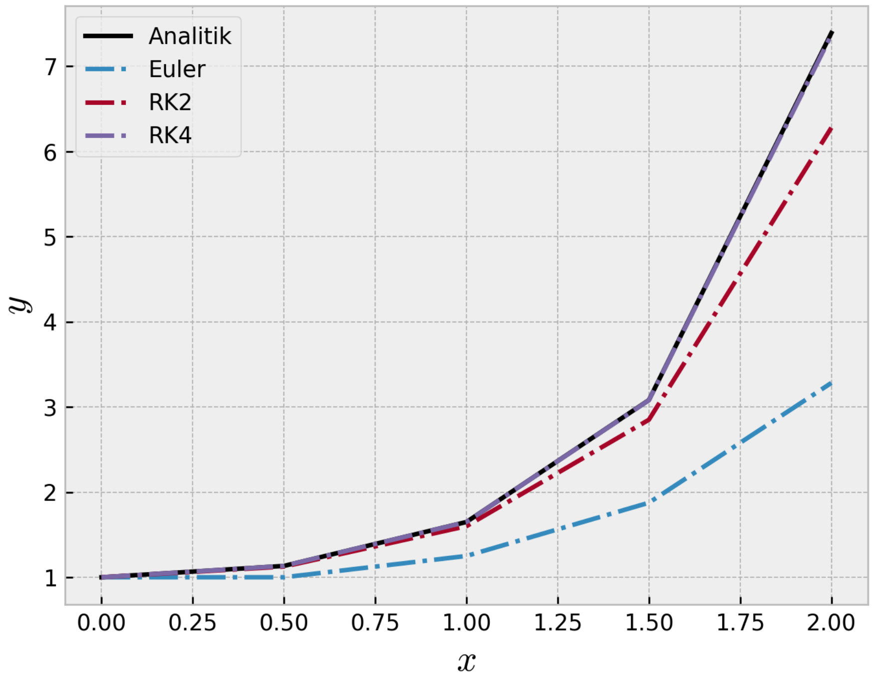
```
    x     y (RK4)   y (analitik)
0.000000  1.000000  1.000000
0.500000  1.133138  1.133148
1.000000  1.648528  1.648721
1.500000  3.077976  3.080217
2.000000  7.366803  7.389056
```

Nampak jika solusi numerik RK4 sangat mendekati solusi analitik-nya. Untuk membandingkannya dengan metode - metode lainnya, kita dapat menjalankan kode Python berikut ini. Visualisasi hasilnya ditampilkan pada Gambar 7.3.

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_076.py

Metode Analitik vs RK4 vs RK2 vs Euler

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/21/23
"""
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("bmh")

# Fungsi persamaan diferensial
dfdy = lambda x, y: x * y
f = lambda x: np.exp(x**2/2)

# Metode Euler
def metode_euler(x, y, h, n):
    hasil = [(x, y)]
    for _ in range(n):
        y += h * dfdy(x, y)
        x += h
        hasil.append((x, y))
    return hasil

# Metode RK2 (Runge-Kutta orde 2)
def metode_rk2(x, y, h, n):
    hasil = [(x, y)]
    for _ in range(n):
        K1 = h * dfdy(x, y)
        K2 = h * dfdy(x + h/2, y + K1/2)
        y += K2
        x += h
        hasil.append((x, y))
    return hasil

# Metode RK4 (Runge-Kutta orde 4)
def metode_rk4(x, y, h, n):
    hasil = [(x, y)]
    for _ in range(n):
        K1 = h * dfdy(x, y)
        K2 = h * dfdy(x + h/2, y + K1/2)
```

```
        K3 = h * dfdy(x + h/2, y + K2/2)
        K4 = h * dfdy(x + h, y + K3)
        y += (K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4) / 6
        x += h
        hasil.append((x, y))
    return hasil

# Solusi Analitik
def solusi_analitik(x_mulai, x_akhir, h):
    nilai_x = np.arange(x_mulai, x_akhir + h, h)
    nilai_y = [f(x) for x in nilai_x]
    return list(zip(nilai_x, nilai_y))

# Parameter
x_mulai = 0
x_akhir = 2
y0 = 1
h = 0.5
n = int((x_akhir - x_mulai) / h)

# Metode Euler
euler_hasil = metode_euler(x_mulai, y0, h, n)

# Metode RK2
rk2_hasil = metode_rk2(x_mulai, y0, h, n)

# Metode RK4
rk4_hasil = metode_rk4(x_mulai, y0, h, n)

# Solusi Analitik
analitik_hasil = solusi_analitik(x_mulai, x_akhir, h)

# Print hasil
print("x \t\t y (Euler) \t y (RK2) \t y (RK4) \t y (analitik)")
for i in range(n+1):
    print("%f \t %f \t %f \t %f \t %f" % (euler_hasil[i][0],
    euler_hasil[i][1], rk2_hasil[i][1], rk4_hasil[i][1], analitik
    _hasil[i][1]))

# Plot hasil
plt.plot(*zip(*analitik_hasil), label='Analitik', linewidth=2,
    color="black")
plt.plot(*zip(*euler_hasil), label='Euler', linestyle= "dashdot"
    )
plt.plot(*zip(*rk2_hasil), label='RK2', linestyle= "dashdot")
plt.plot(*zip(*rk4_hasil), label='RK4', linestyle= "dashdot")
plt.xlabel('$x$', fontsize=16)
plt.ylabel('$y$', fontsize=16)
plt.legend()
```

```
plt.savefig("../gambar/gambar073.png", dpi=250)
```



Gambar 7.3: Perbandingan solusi numerik PDB 7.3 $h = 0, 5$: Euler vs. RK2 vs RK4.

Persamaan Differensial Orde Tinggi

Solusi numerik dari PDB orde tinggi (orde dua, dan seterusnya) dihitung dengan cara pereduksian PDB tersebut menjadi sistem PDB orde satu, sehingga dapat diselesaikan secara simultan dengan menggunakan teknik - teknik yang telah kita diskusikan sebelumnya. Pada bagian ini kita hanya akan membahas penyelesaian numerik untuk PDB orde dua dengan menggunakan metode RK4, namun teknik - teknik yng digunakan tidaklah jauh berbeda untuk penyelesaian pada orde yang lebih tinggi. Penting untuk dingat, jika jumlah kondisi inisial yang diketahui harus sama dengan orde dari PDB yang hendak diselesaikan.

Guna mendapatkan aproksimasi numerik dari $y'' = f(x, y, y')$, kita harus membagi-nya menjadi dua buah PDB sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= f(x, y, u) \end{aligned} \tag{7.13}$$

Kedua persamaan tersebut dapat diaproksimasikan secara bersamaan dengan menggunakan metode RK4. Berikut adalah tahapan - tahapan perhitungannya:

$$\begin{aligned} L_1 &= hu'(x, y, u) \\ K_1 &= hy'(x, y, u) \end{aligned} \tag{7.14}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= hu'\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}K_1, u + \frac{1}{2}L_1\right) \\ K_2 &= hy'\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}K_1, u + \frac{1}{2}L_1\right) \end{aligned} \tag{7.15}$$

$$\begin{aligned} L_3 &= hu'\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}K_2, u + \frac{1}{2}L_2\right) \\ K_3 &= hy'\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}K_2, u + \frac{1}{2}L_2\right) \end{aligned} \tag{7.16}$$

$$\begin{aligned} L_4 &= hu'\left(x + h, y + K_3, u + L_3\right) \\ K_4 &= hy'\left(x + h, y + K_3, u + L_3\right) \end{aligned} \tag{7.17}$$

Hingga akhirnya didapatkan:

$$\begin{aligned} u(x + h) &= u(x) + \frac{1}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) \\ y(x + h) &= y(x) + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{aligned} \tag{7.18}$$

Guna memahami-nya secara praktis, kita akan mencoba untuk menyelesaikan PDB berikut pada domain $[\pi, 2\pi]$ secara numerik:

$$y'' + y = 4x + 10\sin x, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 2 \tag{7.19}$$

Namun, sebelum menyelesaikannya secara numerik, kita akan mencoba mendapatkan solusi analitik-nya terlebih dahulu. Persamaan 7.19 adalah persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan. Bagian homogen dari persamaan ini adalah $y''+y = 0$, dengan persamaan karakteristik $r^2 + 1 = 0$. Akar-akarnya adalah $r = \pm i$, sehingga fungsi komplementernya adalah:

$$y_{CF}(x) = A\cos(x) + B\sin(x) \tag{7.20}$$

Langkah kedua adalah menemukan solusi partikularnya dalam bentuk $y_{PI}(x) = Cx + D\sin(x) + E\cos(x)$. Kemudian, cari y'_{PI} dan y''_{PI} dan substitusikan ke dalam PDB tersebut:

$$y''_{PI} + y_{PI} = 4x + 10\sin(x) \tag{7.21}$$

Melalui penurunan dan substitusi, kita akan menemukan bahwa $C = 2$, $D = -5$, dan $E = 4$, sehingga:

$$y_{PI}(x) = 2x - 5\sin(x) + 4\cos(x) \tag{7.22}$$

Kini, kita dapat menerapkan kondisi awal $y(\pi) = 0$ dan $y'(\pi) = 2$:

$$y(\pi) = A\cos(\pi) + B\sin(\pi) + 2\pi - 5\sin(\pi) + 4\cos(\pi) = 0 \tag{7.23}$$

Dengan menggunakan fakta bahwa $\sin(\pi) = 0$ dan $\cos(\pi) = -1$, kita dapat menyederhanakannya menjadi:

$$A - 2\pi + 4 = 0 \implies A = 2\pi - 4 \tag{7.24}$$

Kemudian, dilakukan substitusi sebagai berikut:

$$y'(\pi) = -A\sin(\pi) + B\cos(\pi) + 2 - 5\cos(\pi) - 4\sin(\pi) = 2 \tag{7.25}$$

Dengan menggunakan fakta bahwa $\sin(\pi) = 0$ dan $\cos(\pi) = -1$, kita dapat menyederhanakan menjadi:

$$A + B + 7 = 2 \implies A + B = -5 \tag{7.26}$$

Sehingga solusi analitik-nya menjadi:

$$y(x) = y_{CF}(x) + y_{PI}(x) = y = 9\pi\cos(x) + 7\sin(x) + 4x - 5x\cos(x) \tag{7.27}$$

Untuk menyelesaikan persamaan 7.19 secara numerik, PDB orde dua ini harus dibentuk menjadi:

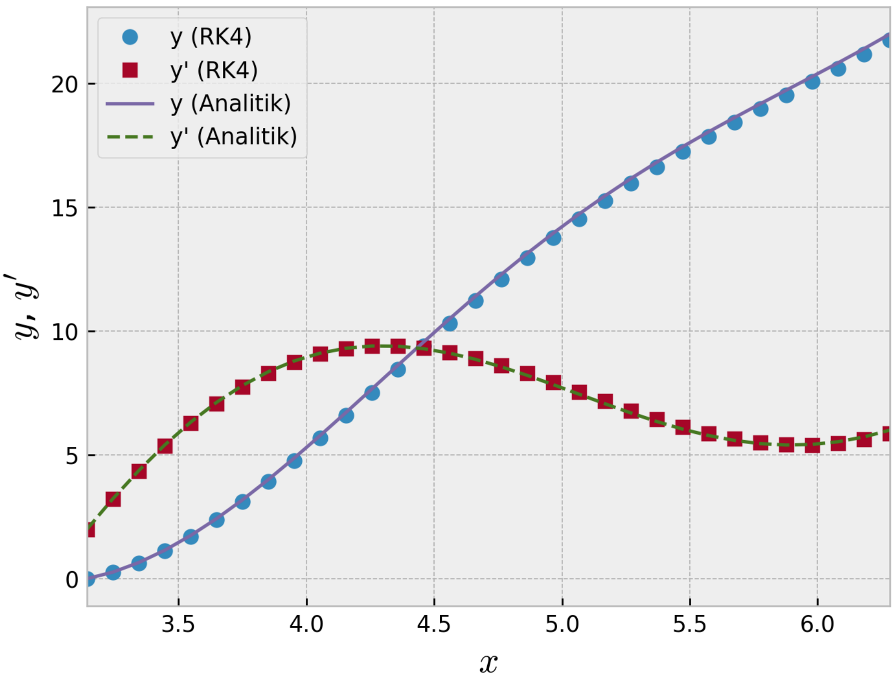
$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= 4x + 10\sin x - y \end{aligned} \tag{7.28}$$

Kemudian diselesaikan secara bersamaan dengan metode RK4. Berikut adalah implementasinya di Python:

```python
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_077.py

Numerik vs. Analitik
PDB Orde 2
SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/22/23
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("bmh")

# sistem PDB orde 1
dy = lambda x, y, u: u
du = lambda x, y, u: 4*x + 10 * np.sin(x) - y

# solusi analitik
f = lambda x: 9*np.pi*np.cos(x) + 7*np.sin(x) + 4*x - 5*x*np.cos
    (x)
df = lambda x: -9*np.pi*np.sin(x) + 7 * np.cos(x) + 4 - 5*(np.
    cos(x) - x*np.sin(x))

# kondisi awal
x = np.pi
xn = 2*np.pi
y = 0.0
u = 2
h = 0.1
n = int((xn-x)/h)

# plot array
xp = np.linspace(x, xn, n+1)
yp = np.empty(n+1, float)
up = np.empty(n+1, float)
yp[0] = y
up[0] = u

# header dari tabel luaran
print('x \t\t y\'(RK4) \t y(RK4) \t y\'(Analitik) \t y(Analitik)
    ')
print('%f \t %f \t %f \t %f \t %f'%(x, u, y, df(x), f(x)))
for i in range(1, n+1):
    L1 = h*du(x, y, u)
    K1 = h*dy(x, y, u)

```

```
    L2 = h*du(x+h/2, y+K1/2, u+L1/2)
    K2 = h*dy(x+h/2, y+K1/2, u+L1/2)

    L3 = h*du(x+h/2, y+K2/2, u+L2/2)
    K3 = h*dy(x+h/2, y+K2/2, u+L2/2)

    L4 = h*du(x+h, y+K3, u+L3)
    K4 = h*dy(x+h, y+K3, u+L3)

    u += (L1 + 2*L2 + 2*L3 + L4)/6
    up[i] = u
    y += (K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4)/6
    yp[i] = y
    x += h
    print('%f \t %f \t %f \t %f \t %f'%(x, u, y, df(x), f(x)))

# Plot
plt.plot(xp, yp, marker = 'o', ls = '', label='y (RK4)')
plt.plot(xp, up, marker = 's', ls = '', label='y\' (RK4)')
plt.plot(xp, f(xp), lw = 1.5, ls = '-', label='y (Analitik)')
plt.plot(xp, df(xp), lw = 1.5, ls = '--', label='y\' (Analitik)'
    )
plt.xlabel("$x$", fontsize=16)
plt.ylabel("$y$, $y'$", fontsize=16)
plt.axis([np.pi, 2*np.pi, None, None])
plt.legend()
plt.savefig("../gambar/gambar074.png", dpi=250)
```

Visualisasi solusi-nya dapat kita lihat pada Gambar 7.4.



Gambar 7.4: Solusi numerik dan analitik dari persamaan 7.19

Solusi Persamaan Differensial Menggunakan SciPy

Pemecah (*solver*) PDB utama dari modul `scipy.integrate` adalah `odeint()`. Pemecah ini dapat digunakan, baik dalam penyelesaian PDB, maupun sistem PDB. Pada bagian ini kita akan mendemonstrasikan penggunaannya untuk menyelesaikan permasalahan pada persamaan 7.13 dan 7.19. Berikut implementasi kode-nya dalam Python:

```
#!/usr/bin/env python
"""
contoh_078.py

PDB menggunakan SciPy

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/22/23
"""

```

```python
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint

# pers. 7.3
dfdy = lambda y, x: x*y
y0 = 1
x = np.linspace(0, 2, 5) # [0, 2], h = 0,5

y = odeint(dfdy, y0, x)
print("Solusi Numerik Pers. 7.3: ", y)

# pers. 7.19
def dy(y, x):
  y, u = y
  dydx = [u, 4*x + 10*np.sin(x) - y]
  return dydx

y0 = [0, 2]
x = np.arange(np.pi, 2*np.pi, .1) # [pi, 2pi], h = 0,1
sol = odeint(dy, y0, x)
print(sol)
```

Khusus untuk solusi PDB orde dua pada variabel `sol`, kolom pertama merepresentasikan nilai y, dan kolom kedua y'. Untuk mengetahui lebih lanjut tentang fungsi `odeint()`, kalian dapat berkunjung ke situs: `https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html`.

Sistem Lorenz 63

Bayangkanlah parsel fluida 2D yang dipanaskan dari bawah, dan mengalami pendinginan di bagian atas-nya. Hal ini kemudian mendorong terjadinya fenomena konveksi seperti yang terjadi pada lapisan troposfer bumi. Konveksi ini pada sejatinya dapat dimodelkan melalui sistem persamaan diferensial parsial (PDP), seperti yang direpresentasikan pada model prediksi cuaca numerik. Namun, pada tahun 1963, Ed Lorenz bersama tim pengembang piranti lunak-nya di Massachusetts Institute of Technology (MIT) mencoba mereduksi karakteristik utama dari proses ini ke dalam sistem PDB nonlinier orde pertama:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\
\dot{y} &= \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\
\dot{z} &= \frac{dz}{dt} = xy - \beta z
\end{aligned}
\tag{7.29}
$$

Variabel x merepresentasikan laju pembalikan konvektif (*convective overturing rate*). Variabel y dan z, masing - masing merepresentasikan temperatur horizontal dan vertikal. Variabel - variabel ini di dalam sistem dinamik dikenal sebagai variabel keadaan (*state variables*) yang merpresentasikan kondisi matematis dari sistem ini. Sistem PDB ini juga mempunyai tiga buah parameter. Parameter σ merupakan bilangan Prandtl, yang menggambarkan rasio antara difusivitas momentum (viskositas kinematik) terhadap difustivitas termal. Jika $\sigma << 1$, maka aliran akan didominasi oleh difusivitas termal, semntara jika $\sigma >> 1$, maka difusivitas momentum akan lebih dominan. Parameter ρ merupakan bilangan Rayleigh yang menunjukkan perbandingan antara skala waktu difusi termal dengan konveksi termal. Jika ρ terlalu kecil, maka panas akan dengan cepat terdisipasi melalui proses difusi, dan fluida akan tetap dalam kondisi stasioner. Jika ρ meningkat dan melewati titik kritis tertentu, maka sistem konveksi akan berjalan, namun jika ρ terlalu besar, maka yang timbul justru sistem mengalami turbulensi. Terakhir, paramter β sendiri terkait dengan ukuran fisis dari sistem tersebut.

Sistem Lorenz ini merupakan salah satu contoh klasik dari sistem dinamik nonlinier yang paling banyak dijadikan objek untuk studi. Nonlinearitas muncul dari suku perkalian xy dan βz dalam PDB 2.9. Selain itu, sistem ini juga menunjukkan perilaku khaotik untuk beberapa nilai parameter tertentu, yang berarti perubahan kecil pada kondisi awal dapat menghasilkan perilaku jangka panjang yang sangat berbeda. Fenomena ini sering kali dinamakan sebagai efek kupu - kupu (*butterfly effect*).

Sistem Lorenz sering digunakan sebagai prototipe untuk mempelajari khaos dan khaos deterministik dalam sistem nonlinier. Sistem ini memiliki atraktor yang dikenal sebagai atraktor Lorenz, yang memiliki bentuk seperti sayap kupu-kupu yang khas. Sifat khaotik sistem ini membuat-nya menarik untuk digunakan dalam mengeksplorasi konsep - konsep terkait teori khaos dan sensitivitas terhadap kondisi awal dalam sistem deterministik.

Berikut merupakan contoh penyelesaian sistem ini menggunakan Python untuk dua kondisi awal yang sedikit berbeda, yakni $\mathbf{u_1} = [1, 1, 1]$ dan $\mathbf{u_2} = [1, 1, 01, 1]$, dengan menggunakan parameter - parameter klasik dari sistem Lorenz 63 yang mempunyai fitur khaotik, yakni $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$. Untuk jangka waktu simulasinya antara $t = 0$ hingga $t = 25$ sebanyak 1000 *time steps*.

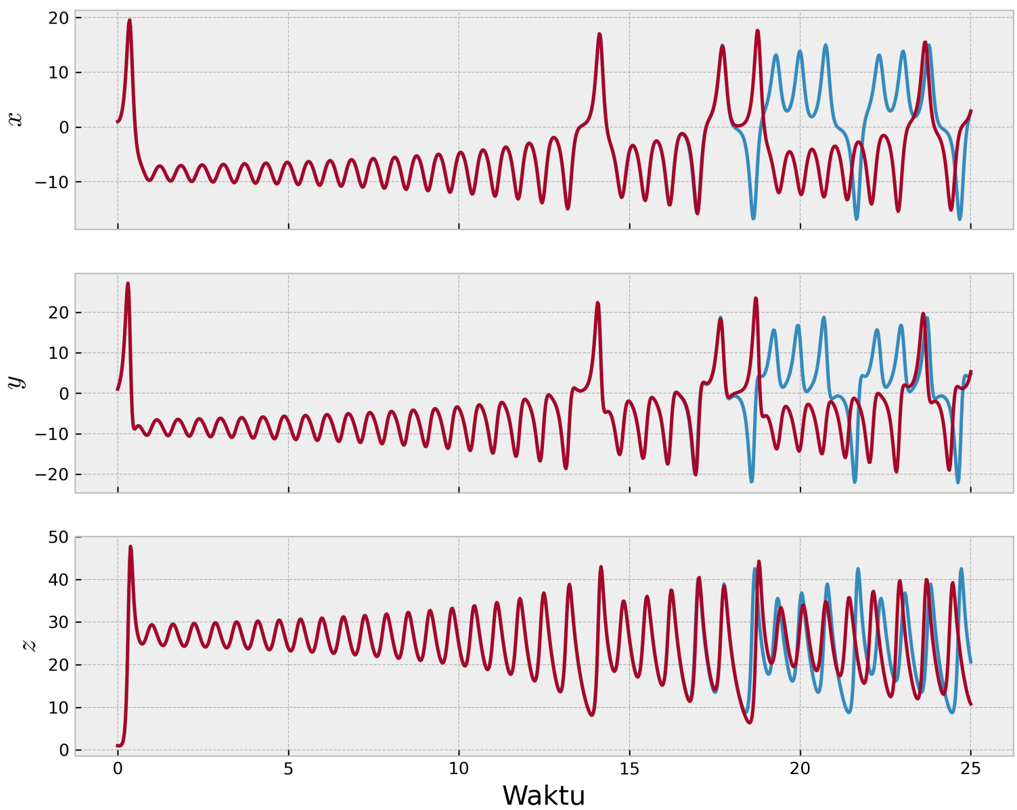
```
#!/usr/bin/env python

"""
contoh_079.py

Sistem Lorenz
```

```python

SHSH <sandy.herho@email.ucr.edu>
12/22/23
"""

import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use("bmh")

# PDB sistem Lorenz
def lorenz(u, t, sigma, rho, beta):
    x, y, z = u
    dxdt = sigma * (y - x)
    dydt = x * (rho - z) - y
    dzdt = x * y - beta * z
    return [dxdt, dydt, dzdt]

# fungsi untuk mensimulasikan & plot trayektori & diagram ruang-fasa 3D
def simulasi_lorenz(kondisi_awal, sigma, rho, beta, jangka_waktu):
    # Selesaikan ODE untuk masing-masing kondisi awal
    trayektori = []
    for ic in kondisi_awal:
        solusi = odeint(lorenz, ic, jangka_waktu, args=(sigma, rho, beta))
        trayektori.append(solusi)

    # Plot trayektori awal
    fig_awal, axs_awal = plt.subplots(3, 1, figsize=(10, 8), sharex=True)

    for i, trajektori in enumerate(trayektori):
        axs_awal[0].plot(jangka_waktu, trajektori[:, 0])
        axs_awal[1].plot(jangka_waktu, trajektori[:, 1])
        axs_awal[2].plot(jangka_waktu, trajektori[:, 2])

    axs_awal[0].set_ylabel('$x$', fontsize=16)
    axs_awal[1].set_ylabel('$y$', fontsize=16)
    axs_awal[2].set_ylabel('$z$', fontsize=16)
    axs_awal[2].set_xlabel('Waktu', fontsize=16)

    # Plot perbedaan x, y, z terhadap waktu
    fig_diff, axs_diff = plt.subplots(3, 1, figsize=(10, 8), sharex=True)

    for i, trajektori in enumerate(trayektori[1:]):  # Lewati trajektori pertama
```

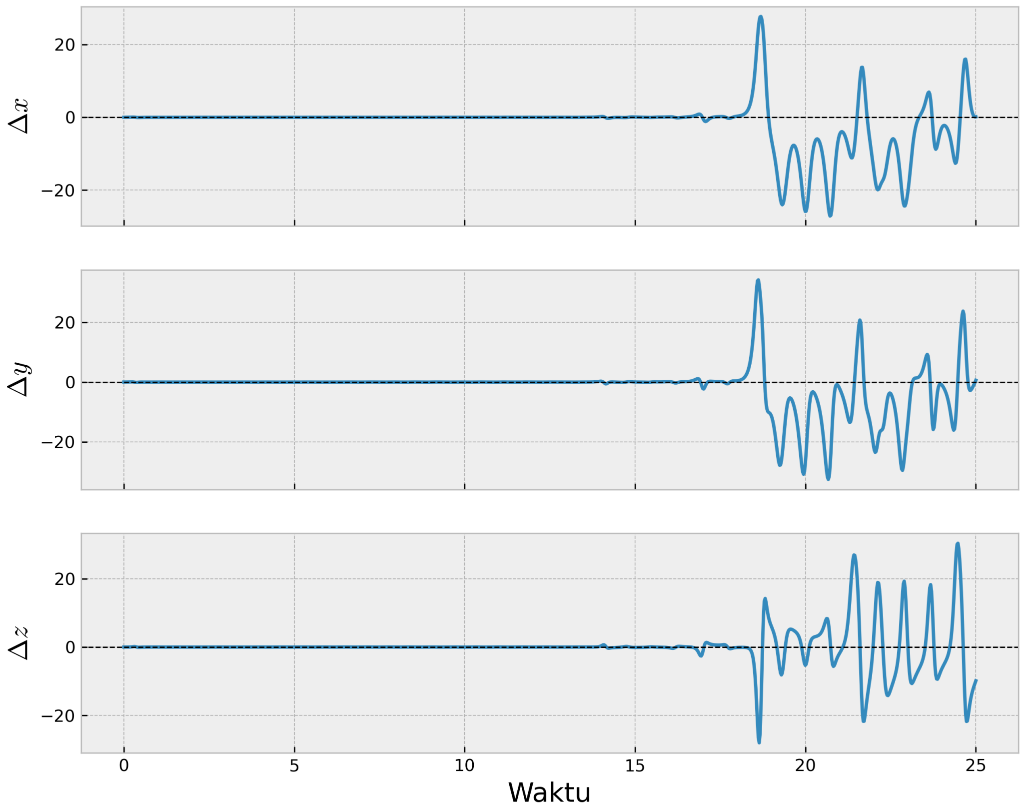
```
        x_diff = trajektori[:, 0] - trayektori[0][:, 0]
        y_diff = trajektori[:, 1] - trayektori[0][:, 1]
        z_diff = trajektori[:, 2] - trayektori[0][:, 2]

        axs_diff[0].plot(jangka_waktu, x_diff)
        axs_diff[1].plot(jangka_waktu, y_diff)
        axs_diff[2].plot(jangka_waktu, z_diff)

    axs_diff[0].axhline(0, color='black', linestyle='--', linewidth=0.8)  # Tambahkan garis horizontal di y=0
    axs_diff[1].axhline(0, color='black', linestyle='--', linewidth=0.8)
    axs_diff[2].axhline(0, color='black', linestyle='--', linewidth=0.8)

    axs_diff[0].set_ylabel('$\Delta x$', fontsize=16)
    axs_diff[1].set_ylabel('$\Delta y$', fontsize=16)
    axs_diff[2].set_ylabel('$\Delta z$', fontsize=16)
    axs_diff[2].set_xlabel('Waktu', fontsize=16)

    # Plot ruang fasa 3D untuk dua trajektori
    fig_3d = plt.figure(figsize=(10, 8))
    ax_3d = fig_3d.add_subplot(111, projection='3d')

    for i, trajektori in enumerate(trayektori[:2]):  # Plot hanya dua trajektori pertama
        ax_3d.plot(trajektori[:, 0], trajektori[:, 1], trajektori[:, 2], marker='o', label=f'Trajektori {i + 1}')

    ax_3d.set_xlabel('$x$', fontsize=16)
    ax_3d.set_ylabel('$y$', fontsize=16)
    ax_3d.set_zlabel('$z$', fontsize=16)
    ax_3d.legend()

    # Menyimpan gambar dengan fungsi simpan_gambar
    simpan_gambar(fig_awal, '../gambar/gambar075.png')
    simpan_gambar(fig_diff, '../gambar/gambar076.png')
    simpan_gambar(fig_3d, '../gambar/gambar077.png')

# Fungsi untuk menyimpan gambar
def simpan_gambar(fig, filename):
    fig.savefig(filename, dpi=300, bbox_inches='tight')
    print(f"Gambar {filename} disimpan.")

if __name__ == "__main__":
    # Contoh kasus
    kondisi_awal = np.array([[1.0, 1.0, 1.0], [1.0, 1.01, 1.0]])  # Kondisi awal contoh
    sigma = 10.0
```

```
    rho = 28.0
    beta = 8.0 / 3.0
    jangka_waktu = np.linspace(0, 25, 1000)

    # Memanggil fungsi simulasi_lorenz
    simulasi_lorenz(kondisi_awal, sigma, rho, beta, jangka_waktu
   )
```

Nampak jika secara pada awalnya, trajektori variabel - variabel keadaan terhadap waktu dari kedua sistem ini beriringan, namun ketika melewati saatuan waktu ke-15, terjadi perbedaan yang cukup besar, yang tidak dapat kita bayangkan dapat ditimbulkan hanya dari perturbasi kecil dari kondisi awal (Gambar 7.5 dan 7.6). Selain itu, nampak jika deret waktu dari sistem ini pun bukan deret waktu yang bersifat siklikal dan mudah diprediksi. Jika mengingat bahwa hal ini diproduksi dari sistem deterministik yang relatif sederhana, tentu sangat mengejutkan bagi kita.

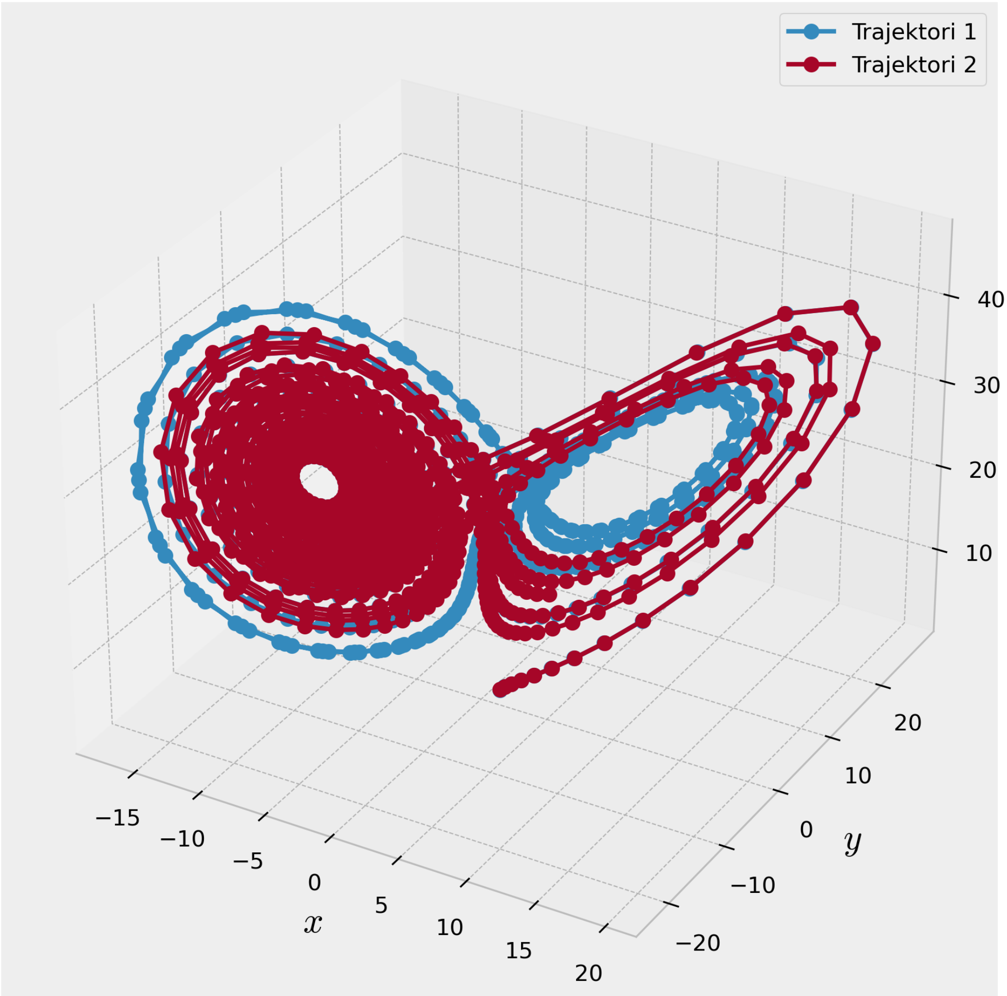


Gambar 7.5: Solusi numerik dari variabel - variabel keadaan dari sistem Lorenz 63 untuk kedua kondisi awal.



Gambar 7.6: Perbedaan variabel - variabel keadaan dari sistem Lorenz 63 dari kedua kondisi awal.

Diagram ruang-fasa (*phase-space diagram*) 3D dari variabel - variabel kondisi diperlihatkan pada Gambar 7.7. Diagram ini memperlihatkan kondisi teoretik dari sistem ini pada waktu tertentu. Nampak jika kedua sistem ini awalnya mempunyai *state* yang sama, hingga pada suatu waktu, kondisi-nya mulai terpisah. Namun, secara umum, struktur ruang-fasa-nya masihlah sama, yakni dengan berputar mengitari dua titik ekuilibria tanpa pernah memotong trajektori yang sama. Dua titik ini lah yang kerap dinamakan sebagai atraktor.



Gambar 7.7: Diagram ruang-fasa dari sistem Lorenz 63 untuk dua kondisi awal yang sedikit berbeda.

Sistem Lorenz 63 ini mengingatkan kita, bahwa dari sistem yang sangat sederhana saja, kita dapat mengeksplorasi kenyataan yang sangat kompleks. Prediksi dari sistem deterministik ini sangat sensitif terhadap kondisi awal, yang tidak memungkinkan kita untuk melakukan prediksi melebihi beberapa waktu tertentu, tanpa mengetahui dengan sangat detail tentang kondisi awal. Tentu, di dalam kenyataannya proses konvektif di troposfer jauh lebih rumit dari sekedar PDB di dalam sistem ini. Maka, dapat dibayangkan mengapa produk prediksi cuaca numerik (hasil komputasi dari persamaan Navier-Stokes) menjadi tidak berguna sesudah melewati beberapa hari, jika tidak diasimilasikan dengan data observasi.

Diperlukan analisis kuantitatif yang lebih jauh tentang sistem Lorenz 63 ini, seperti mengkuantifikasikan prediktabilitas dan bifurkasi dari sistem dengan menggunakan eksponen Lyapunov, kemungkinan prediktabilitas-nya dengan menggunakan metode - metode statistik, dll. Namun, karena kapasitas penyusun bukanlah sebagai matematikawan terapan, dipersilakan kepada pembaca untuk mencari tahu sendiri secara lebih dalam tentang topik yang nampak-nya tidak ada habis - habisnya untuk dieksplorasi ini.

Bibliografi

[1] A. Gezerlis. *Numerical Methods in Physics with Python.* Cambridge University Press, 2023.

[2] A. Scopatz and K. D. Huff. *Effective Computation in Physics: Field Guide to Research with Python.* O'Reilly Media, Inc., 2015.

[3] B. Rahardjo. *Belajar Singkat Pemrograman Python 3.* Modula, 2017.

[4] C. Hill. *Learning Scientific Programming with Python.* Cambridge University Press, 2020.

[5] F. J. Blanco-Silva. *Learning SciPy for Numerical and Scientific Computing.* Packt Publishing, 2013.

[6] G. Moruzzi. *Essential Python for the Physicist.* Springer, 2020.

[7] H. P. Langtangen. *A Primer on Scientific Programming with Python.* Springer, 2016.

[8] J. Sundnes. *Introduction to Scientific Programming with Python.* Springer, 2020.

[9] J. M. Kinder and P. Nelson. *A Student's Guide to Python for Physical Modeling.* Princeton University Press, 2021.

[10] J. W-B. Lin, H. Aizenman, E. M. C. Espinel, K. Gunnerson, and J. Liu. *An Introduction to Python Programming for Scientists and Engineers.* Cambridge University Press, 2022.

[11] Q. Kong, T. Siauw, and A. Bayen. *Python Programming and Numerical Methods: A Guide for Engineers and Scientists.* Academic Press, 2020.

[12] R. Johansson. *Numerical Python: A Practical Techniques Approach for Industry.* Apress, 2015.

[13] R. H. Landau, M. J. Páez, and C. C. Bordeianu. *Computational Physics: Problem Solving with Python.* John Wiley & Sons, 2015.

[14] S. Nagar. *Introduction to Python for Engineers and Scientists: Open Source Solutions for Numerical Computation.* Apress, 2017.

[15] S. H. S. Herho. *Tutorial Pemrograman Python 2 Untuk Pemula.* WCPL ITB, 2017.

[16] S. I. Gordon and B. Guilfoos. *Introduction to Modeling and Simulation with MATLAB® and Python.* CRC Press, 2017.

[17] W. Miles. *Numerical Methods with Python: for the Sciences.* Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2023.

[18] W. Schmidt and M. Völschow. *Numerical Python in Astronomy and Astrophysics: A Practical Guide to Astrophysical Problem Solving.* Springer, 2021.

Tentang Penyusun

Sandy Hardian Susanto Herho berhasil meraih gelar sarjana sains di bidang meteorologi di Institut Teknologi Bandung (ITB) pada tahun 2017, setelah hampir *drop out* akibat terlalu banyak mengulang mata kuliah yang terkait dengan pemrograman. Setelah agak lama menganggur, dan bekerja serabutan untuk bertahan hidup, ia kemudian melanjutkan studinya tentang paleoklimatologi hingga meraih gelar magister sains di bidang geologi dari University of Maryland, College Park (UMD) pada tahun 2023. Saat ini ia tercatat sebagai mahasiswa doktoral di bidang oseanografi dengan riset tentang pemodelan numerik biogeokimia laut skala global di University of California, Riverside (UCR).

Muhammad Ridho Syahputra menyelesaikan perkuliahannya di ITB dengan gelar sarjana sains di bidang meteorologi pada tahun 2008. Pendidikan S2-nya diselesaikan juga di ITB dengan gelar magister sains kebumian dengan bidang keahlian sains atmosfer pada tahun 2012. Ia kemudian menjadi pengajar di Program Studi Meteorologi di almamaternya tersebut semenjak lulus S2 hingga saat ini. Saat ini penelitiannya lebih banyak berurusan dengan analisis statistik terkait dengan perubahan iklim modern di Benua Maritim.

Nurjanna Joko Trilaksono menamatkan pendidikan S1-nya di ITB dengan gelar sarjana sains di bidang meteorologi pada tahun 2004. Dikenal sebagai mahasiswa cemerlang, ia kemudian langsung melanjutkan studinya pada bidang pemodelan numerik atmosfer di tingkat pasca-sarjana. Ia meraih gelar magister sains kebumian dari ITB pada tahun 2007. Gelar doktoral di bidang sains atmosfer diperolehnya di Kyōto Daigaku pada tahun 2012. Sekembalinya dari negeri sakura, ia langsung ditunjuk sebagai pengajar di ITB, peran yang dilakoninya hingga saat ini. Selain sibuk mengajar, ia juga banyak menghabiskan waktu dengan melakukan penelitian tentang penerapan model numerik untuk prediksi cuaca di Benua Maritim.

Buku ini menawarkan pendekatan komputasi numerik menggunakan bahasa pemrograman yang paling populer saat ini, yakni Python untuk menangani permasalahan – permasalahan di bidang sains dan rekayasa. Kami di sini, sengaja tidak menggunakan pustaka - pustaka tingkat tinggi di luar NumPy, Matplotlib, dan SciPy, guna membangun pemahaman pembaca terhadap algoritma – algoritma dasar yang dijabarkan di sini secara mendalam.

Pembaca akan diajak untuk membangun algoritma – algoritma fundamental mulai dari pencarian akar hingga persamaan diferensial biasa dengan hanya menggunakan struktut bawaan Python dan pustaka NumPy. Sesudah memperoleh pengetahuan ini, kami juga mengajarkan cara pengimplementasiannya secara lebih mudah dengan menggunakan SciPy.

Buku ini cocok untuk dijadikan sumber sekunder bagi mahasiswa tingkat dua di bidang sains dan rekayasa yang sedang mengambil matakuliah metode numerik.Selain itu, buku ini juga merupakan salah satu dari sedikit buku berbahasa Indonesia yang dapat direproduksi ulang secara gratis. Seluruh kode sumber dari buku ini tersedia secara terbuka pada laman GitHub penyusun.

DOI 10.5281/zenodo.10427127

n

Weather and Climate Prediction Laboratory
Program Studi Meteorologi ITB
Gedung Labtek XI Lt. 2
Jalan Ganesha 10, Bandung 40132
Telepon: 022-2500494
Faksimili: 022-2534139
Website: http://www.meteo.itb.ac.id/